

Játékelmélet

Pluhár András

2011. február 16.

Előszó

A matematika és a játékok elmélete gyakran összekapcsolódik. Emlékezhetünk de Mèrè lovag problémáira, melyeket Fermat és Pascal egyidőben oldott meg, és a feltételes valószínűség illetve a várható érték fogalmát helyesen ragadva meg, hozzájárult a valószínűségszámítás megalapozásához. A játékok azóta is számtalan alkalommal felbukkannak a matematika különböző területein, a halmazelméletben, kombinatorikában, bonyolultságelméletben. Játékokat használnak a továbbá a közgazdaságtanban, az evolúciós biológiában és ezer más helyen, ahol érdekellentétek vizsgálatára van szükség.

Ezen diszciplínák nem használnak egységes nyelvezetet, mások a célkitűzéseik és az eredményeik jellege. Közös bennük, hogy a matematika eszközeivel próbálják megragadni a problémákat és ez a törekvés önmagában is mély kapcsolatokat eredményez. A könyv elsődleges célja minél többet megmutatni ezek közül, és így segíteni az Olvasó eligazodását ebben a sokszínű rengetegben.

A tárgyalásban nem a időbeli sorrendben haladunk. Először a matematika által inspirált eredményekről lesz szó. Ide tartozik Zermelo klasszikus tétele, a Bouton által vizsgált Nim játék és rokonsága egészen a Grundy-Sprague elméletig. Ez a vonal, az ún. *kombinatorikus játékok* elvezetnek a Conway-féle játék (és szám) fogalomhoz, amely az egész matematikát (aritmetikát) magába foglalja.

Rendkívül sokrétű kapcsolódása van a kombinatorikához a tic-tac-toe általánosításainak, amit összefoglalva *pozíciós játékoknak* nevezhetünk. Ezek vizsgálatánál a Ramsey elmélet, véletlen módszer, topológiai eredmények, gráfok, matroidok, bonyolultság stb. játszanak jelentős szerepet, melyek aztán felbukkannak egészen másfajta játékokban is.

Ezt követően egy újabb modellt, az ún. *teljes információs, véges, kétszemélyes, zérusösszegű* játékokat, másképpen *mátrix játékokat* vizsgáljuk meg. Ezek felfoghatók úgy is, hogy az egyik játékos az adott A mátrix egy sorát, a másik pedig egy oszlopát választhatja, és ha ez az i -edik illetve j -edik, akkor az első $a_{i,j}$ -t nyer, a második pedig ennyit veszít. Ez modell jól kezelhető és meglepő alkalmazási vannak.

Egy természetes általánosítása a mátrix játékoknak az, ha egyrészt több játékos van, illetve a nyeremények összege nem nulla. Ebben az esetben nincs olyan megkérdőjelezhetetlen megoldás, mint a korábbiakban. *Nash egyensúly* létezése bizonyítható elég általános feltételek mellett. Az egyensúly viszont többnyire nem egyértelmű, sokszor nem stabil és a kiszámítása sem könnyű. Ezen nehézségek ellenére lényeges vonásait megragadják a modellezni kívánt jelenségeknek.

A többszemélyes játékokban felvetődik a *kooperáció* kérdése, matematikai szempontból pedig ennek megfelelő modellezése.

1. fejezet

A kezdetek

A játékok szerepe sokféleképpen megközelíthető, más egy evolúció biológus, egy pszichológus vagy egy közgazdász nézőpontja. Az egyik szerint a játékok a létfontosságú cselekvések biztonságos begyakorlására, rangsorok felállítására valók, míg a másik a kapcsolatok megerősítésének vagy az idő struktúrálásának eszközt látja bennük. Mások modellként tekintenek a játékokra, melyekkel megjósolható bonyolult helyzetek kimenetele. A matematika szempontjából sem érdektelenek a játékok, új gondolatokat sugallhatnak vagy régieket illusztrálhatnak. Itt most ezek némelyikét mutatjuk be.

1.1. Véletlentől függő játékok

Véletlentől függő folyamatokat majd minden civilizáció ismer, melyeket eredetileg esetleg jóslásra, sorsolásra használtak, később némelyik a szórakozássá, sporttá illetve játékká vált. A nyelv is gazdagodott az innen kölcsönzött kifejezésekkel. Például *kocka* szavunk a tipikus anyagára (csont), míg a *cinzelt kocka* már egy kifinomult alkalmazás [67]. Lenyűgöző, ahogy az asztrológia és alkímia a csillagászat és kémia megszületéséhez, a valószínűségszámítás és utilitás elméletek gyökerei a lenézett szerencsejátékokban vannak. Az utóbbi esetben a szereplők is ismertek¹: de Mèrè lovag szerencsejátékokra vonatkozó kérdéseit válaszolta meg Blaise Pascal és Pierre de Fermat és ezzel tisztázták az alapfogalmakat.

¹Pontosabban a legjelentősebb szereplők. Míg a feladat maga alighanem arab eredetű, nyomtatásban Fra Luca Paccioli jelentette meg, és foglalkozott vele Niccolo Tartaglia is, lásd [67].

1.1.1. Az osztozkodás paradoxona, 1654

A és B egy, csak a szerencsétől függő, egyenlő esélyű, hat győzelemig tartó játékot játszanak. Tegyük fel, hogy abba kell hagyniuk a játékot amikor A egy, B pedig három nyerésre van a győzelemtől. Mi lenne az egységnyi nyeremény *igazságos* elosztása? Egymástól függetlenül Pascal és Fermat is azt javasolta, hogy A és B a játék folytatásával adódó *várható nyereményt* kapják meg. Mai szóhasználattal, ha X_A az A játékos véletlentől függő nyereménye (0 vagy 1 értékű), akkor $\mathbb{E}X_A$ legyen a kifizetése. $\mathbb{E}X_A = \Pr(\text{A nyer}) = 7/8$. Valóban, a játék legfeljebb három forduló után véget érne, az egyenlő esélyű elemi események (a fordulónkénti nyerővel): AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, és BBB. Ezekből hét az A nyeréséhez vezet, azaz $\Pr(\text{A nyer}) = 7/8$. Az is látható, hogy $\mathbb{E}X_B = 1/7$. Általában, ha A-nak a , B-nek pedig b játszmát kellene nyerni a győzelemhez, akkor az $m = a + b - 1$ hosszú AB sorozatok közül azokat kell vennünk, ahol legalább a db A van, azaz $\Pr(\text{A nyer}) = 2^{-m} \sum_{i=a}^m \binom{m}{i}$.

Megjegyzés. Vannak másfajta igazság fogalmak is, melyek adott környezetben szintén meghonosodhatnak és fennmaradhatnak. Feloszthatnának a nyereményt a megnyert játszmák száma, egyfajta teljesítmény elv szerint 5 : 3 arányban. Mondhatnánk, hogy mivel nincs döntés, legyen az arány 1 : 1. Vagy azt, hogy egyik fél sem nyert, ne kapjanak semmit. Általánosságban Daniel Bernoulli nevéhez fűzhető az ún. *Bernoulli elv*, amely szerint az optimalizálási feladatokban helyettesítsük a valószínűségi változókat a várható értékükkel. Ez a megközelítés nagyon elterjedt a játékelméletben is, viszont megvannak a korlátai.

1.1.2. A szentpétervári paradoxon

Péter és Pál a következő játékot játsza: egy érmét (dukátot) addig dobálnak, amíg fej jön ki. Ha ez az i -edik lépésben következik be, akkor Péter fizet Pálnak 2^i dukátot. Kérdés, mennyi pénzt ér Pálnak a játék, vagy másképpen, mennyit kérjen Péter Páltól a játék jogáért? A várható nyeremény $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i 2^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$, tehát elvileg a játék *végtelen sokat* ér. Ugyanakkor senki sem hajlandó tíz dukátnál többet fizetni érte, ami a Bernoulli elv alapján nem magyarázható meg. Ez megrázta az akkori matematikai közéletet, hisz, mint említettük a várható érték fogalma rendkívül fontos volt a világgépükben.

Bernoulli ugyanakkor adott egy lehetséges magyarázatot, amely a modern közgazdaságtan megalapozásában vált fontossá. Nem a pénz nominális értékét kell tekinteni, hanem a *hasznosságát*. Tehát míg a nyeremény $x \in X$ valamely X halmazra, a hasznosság vagy *utilitás* az $u(x)$ lesz, ahol $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Jelen esetben olyan

hasznosságot érdemes definiálni, amely függ Pál vagyonától. Ha a játék kezdetén Pálnak d dukátja van, akkor az x dukát nyeremény utilitása $u(x, d, c) = c \log(1 + x/d)$, valamely $c > 0$ konstansra.²

Megjegyzés. Nem hallgathatjuk el, hogy a véletlen játékokat használó megközelítése elhitetheti, hogy mindig járható ez az út. Ez az ún. *ludic fallacy*, a részletes elemzése megtalálható Nassim Taleb könyvében [69].

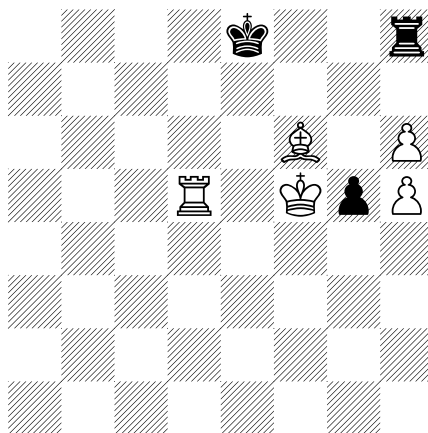
1.2. Determinisztikus játékok

1.2.1. Sakk

A determinisztikus játékok közül a sakknak volt talán a legerősebb hatása a matematikára, Ernst Zermelo híres eredményét is ez motiválta.

Korábban felmerült, hogy létezik valami formula, amelyet követve a játékos nyer. Ma már megmosolyogtató, hogy nem tették fel a kérdést, mi van, ha *mindkét* fél e szerint a formula szerint játszik?

Mielőtt ebben elmélyednénk, lássunk egy problémát, amelyet W. Langstaff közölt *Chess Amateur* c. lapban 1922-ben.



Kis gondolkodás után rájöhetünk, világos két lépésben mattol. Ha sötét már lépett a királyával vagy a bástyájával, akkor az 1. Kf5-e6 után nem védheti a 2. Bd5-d8 mattot. Ha sem a király, sem a bástya nem mozdult még a játszma során, akkor sötét

²Pál számára ezzel véges értékűvé válik a fenti játék. A logaritmus függvény megelőlegezi a *csökkenő határhaszon* jelenséget, a valós értékek az *korlátlan oszthatóságot*, a végtelenbe tartásnak pedig csak az *átruházhatóság* mellett van csak értelme.

utolsó lépése csakis a 0. -, g7-g5 lehetett, hiszen a g6-on álló gyalog támadta volna világos királyt. Ekkor viszont világos lépheti az 1. h5×g6 menet közbeni³ ütést, majd ha sötét sáncol, akkor 2. h6-h7 matt, különben pedig az előbb látott 2. Bd5-d8 matt.

A feladvány két szempontból is tanulságos. Láttuk, hogy *van* matt két lépésben, de nem tudjuk, *hogyan*. Azaz a matematikában oly gyakori egzisztencia bizonyítás történt. A másik tanulság, hogy ki kell bővítenünk az *állás* fogalmát; az nem pusztán a táblán lévő bábok elhelyezkedése adja meg, hanem számít a játék addigi menete is.

1.2.2. Kombinatorikus játékok

A sakk kézenfekvő általánosítása az alábbi lehet, lásd [14]:

- Két játékos van, I (fehér) és II (fekete), I kezd.
- Véges sok állás van, és adott egy kezdő állás.
- Minden állásban eldönthetők a játékosok lehetséges lépései.
- A játékosok felváltva lépnek.
- Minden szabályos sorozata a lépéseknek véges.
- Szabályos lépések egy teljes (kezdőállástól végállásig) sorozata egy játszma.
- A kimenetel minden végállásban meghatározott, az egyik játékos nyer, vagy döntetlen.
- Mindkét játékos rendelkezik az összes információval; ismeri a szabályokat és a lehetőségeit, emlékszik a megtett lépésekre, látja saját és az ellenfele lépéseit stb.
- Nincsenek a véletlentől függő lépések, szabályok.

Ezek a feltételek nyilvánvalóan ekvivalensek egy absztrakt Γ játékkal, $\Gamma = (T, F)$, ahol T egy irányított gyökeres fa^4 , míg F a T levelein értelmezett függvény mely az I, II vagy D értékeket veheti fel. Az r gyökérpont nulla befokú, minden más pont befoka egy, és minden irányított út véges T -ben. A játék menete a következő: a játékosok egy érmét tologatnak a T fa irányított élei mentén. I kezd r -ben és egy

³en passant

⁴ T -t az adott kombinatorikus játék fájának szokták hívni.

tetszőleges szomszédjára lép, majd ezek után felváltva lépnek. Egy q végállást elérve I (II) nyer, ha $F(q) = I$ (II), illetve döntetlen, ha $F(q) = D$. *Stratégia* alatt egy olyan, esetleg parciális, s függvényt értünk, amely T egy x belső pontjához egy olyan y pontot rendel, melybe vezet él x -ből. Egy s stratégia nyerő (döntetlen) valamely játékosnak, ha azt követve az ellenfél bármely játéka esetén nyer (döntetlent ér el). Egy s stratégia azonosítható a T fa egy T_s részfájával: minden x pontból induló élt törölünk az $(x, s(x))$ kivételével.

Ezekkel a fogalmakkal kimondhatjuk Zermelo híres tételét:

1. Tétel. *Egy kombinatorikus játékban vagy valamelyik félnek van nyerő stratégiája, vagy mindkettőnek van döntetlen stratégiája.*⁵

Bizonyítás: Először T pontjainak a *paritását* tisztázzuk. Mivel T fa, minden x pontjába pontosan egy út vezet az r gyökekből. Az x pont $p(x)$ paritása ezen út éleinek a paritása. (Ha egy x belső páros, akkor I lép, míg ha páratlan, akkor II .)

Ezek után az ún. *visszafele címkézést* definiáljuk T pontjain. Egy $q \in V(T)$ végpont címkéje $c(q) := F(q)$, azaz a játék kimenetele. Egy x pontra definiálható a címke, ha a címke már adott az összes olyan y pontra, amelyre $(x, y) \in E(T)$. Ekkor ha $p(x) = 0$,

$$c(x) := \begin{cases} I & \text{ha van olyan } y, \text{ hogy } (x, y) \in E(T) \text{ és } c(y) = I \\ II & \text{ha minden } y, (x, y) \in E(T) \text{ esetén } c(y) = II \\ D & \text{különben.} \end{cases}$$

Páratlan paritású x -re hasonlóan

$$c(x) := \begin{cases} I & \text{ha minden } y, (x, y) \in E(T) \text{ esetén } c(y) = I \\ II & \text{ha van olyan } y, (x, y) \in E(T) \text{ és } c(y) = II \\ D & \text{különben.} \end{cases}$$

Így minden pontnak lesz címkéje, hisz egy x_1 pont akkor nem kapott címkét, ha van olyan x_2 , $(x_1, x_2) \in E(T)$, hogy x_2 -re sem definiált a címke. Ekkor viszont lennie kell egy olyan x_3, x_4, \dots sorozatnak, amelyre szintén nem definiált a címke, és minden $i \in \mathbb{N}$ -re $(x_i, x_{i+1}) \in E(T)$, ami ellentmond annak, hogy T -ben nincs végtelen út.

Ha $c(r) = I$, akkor I nyer, a stratégiája pedig az lehet, hogy minden páros x -re egy olyan $s(x) := y$ -et választ, amelyre $(x, y) \in E(T)$ és $c(y) = I$. Hasonlóan járhat

⁵Ez a véges játékokra vonatkozó *tercium non datur*, azaz nincs harmadik lehetőség, csakúgy, mint a kétértékű logikában. Sokkal meglepőbb, amint azt látni fogjuk, hogy végtelen játékok esetén ez nincs így; a nyereség kérdése lehet eldönthetetlen, holott minden végállásra nyer valamelyik fél.

el, és nyer II , ha $c(r) = II$. Végül $c(r) = D$ esetén mindkét játékosnak van döntetlen stratégiája, most a D -vel címkézett pontokat követve. \square

Megjegyzések. Vegyük észre, hogy igazából egy konstruktív bizonyítást (algoritmust) adtunk, amellyel a fa méretével lineáris időben eldönthető bármely állás kimenetele.

Az algoritmus, a visszafele címkézés, másfajta játékok vizsgálatában is nagyon lényeges, később még használjuk.

A 6. tétel valamivel általánosabb is kimondható, és valójában Zermelo sem pontosan ilyen formában tette ezt. Mi több, az általa adott bizonyítás nem volt hibátlan, azt később Kőnig Dénes, Kalmár László és Neumann János is javította, illetve erősítette, lásd [22, 72].

1.2.3. A Nim

A nimet 1902-ben alkotta meg Charles Bouton, bár korábban is létezett hasonló kínai játék [17].

Táblaként néhány kupac kavics szolgálhat. A lépésen levő játékosnak választania kell egy kupacot, és elvenni belőle tetszőleges számú, de legalább egy kavicsot. Az a játékos győz, aki az utolsó kavicsot elveszi. A kavicsok számának végeessége miatt a játék nem lehet döntetlen, így ha az egyik játékos képes elkerülni a veszteséget, akkor nyerni fog. Ez az alapja a Bouton által kidolgozott stratégiának is. Tegyük fel, hogy lehet definiálni a *NIM* játék egy pillanatnyi állásának egy T tulajdonságát a következő módon:

(i) Ha minden kupac üres, akkor teljesül T .

(ii) Ha nem teljesül T , akkor lehet olyan lépést tenni, hogy a létrejövő állásban teljesül T .

(iii) Ha egy állásban teljesül T , akkor bármely lépést téve a keletkező állásban már nem fog teljesülni.

Ha a játék kezdetén nem teljesül T , akkor I , (ii) alapján olyan lépést választ, hogy teljesüljön T . Így, (ii) miatt, II bármely válasza után (ha II tudott még lépni egyáltalán) olyan állást kap I , melyre T ismét nem teljesül. Következésképp I -nek lesz szabályos lépése, amely után újra áll a T tulajdonság. Előbb-utóbb persze elfogynak a kövek, a T tulajdonság teljesül és a lépésen levő játékos veszít. Ez viszont csak II lehet az eddigiek alapján. Ha a játék kezdetén teljesül T , akkor, hasonló érveléssel beláthatóan, II nyer. Már csak az maradt hátra, hogy találjunk az i , ii és iii pontoknak eleget tevő T tulajdonságot.

Írjuk fel minden kupacra a benne lévő kavicsok számát kettes számrendszerben, s

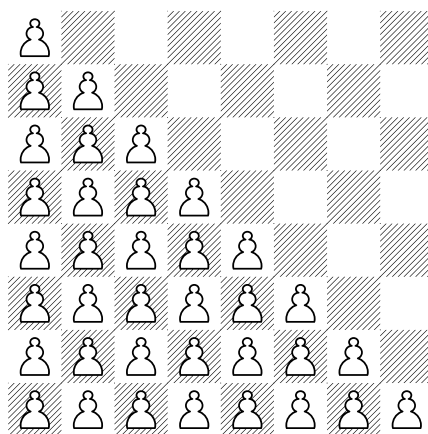
nézzük meg ezekben a számokban az egy adott helyiértéken előforduló egyesek számát. Ha ezek a számok minden helyiértékre párosak, akkor teljesül T , ha nem, akkor nem.

(i) Ha üresek a kupacok, akkor minden szám 0, következésképp minden helyiértéken is összesen 0 db 1-es áll.

(ii) Ha nem áll T , vegyük a legnagyobb helyiértéket, amelyre páratlan egyes fordul elő. Válasszunk egy K kupacot, ahol a hozzátartozó számban egyes áll ezen a helyiértéken. Vegyük el a K kupacnak annyi elemét, hogy a kupacot jellemző új számban pontosan azok a helyiértékek változzanak (nulláról egyre vagy egyről nullára), amely helyiértékekre az egyesek száma páratlan volt. Így egy T tulajdonságú álláshoz jutunk.

(iii) Egy lépés az érintett K kupachoz tartozó számot megváltoztatja legalább egy jegyben. Ezért ha T teljesült, a lépés után már nem fog.

Megjegyzések. Bouton eredeti megfogalmazásában a kupacok a sakktábla egy-egy oszlopában levő figurák:



Bouton utalt rá, hogy a nim *misère* változatának⁶, azaz, amelyben az utolsó lépést tevő játékos veszít, ugyanez a nyerési feltétele. Kövessük a normál nim nyerő stratégiáját egészen addig, míg egy kivételével minden kupac egy méretű. Ekkor az egyetlen nem egy méretű kupacból vegyünk el; ha a kupacok száma páros, akkor az összes elemét, ha páratlan, akkor hagyjunk meg egyet.

⁶Majdnem minden játéknál vizsgálható ez az "az veszít, aki nyer" változat. Általában ez még nehezebb, mint az eredeti játék. Conway [21] használta a *misère* jelzõt, magyarul a fordított, [57, 58] vagy betli [23] a kézenfekvõ elnevezés.

1.2.4. Sprague és Grundy elmélete

Egy nim állás felfogható úgy, mint a belőle egy lépésben keletkező állások halmaza. Ez az elgondolás működik akkor is, ha egy játék állás mindkét félnek ugyanazok, azaz a játék *pártatlan*. Ha H és G ilyen játékok, van értelme a $H + G$ -nek: ez az a játék, amelyben a lépésen levő fél az dönthet, H -ban vagy G -ben lép, a másikat változatlanul hagyja.

A nim n kavicsból álló kupacát hívjuk $*n$ -nek, $*0$ az üres kupac, így például a gyakori 3, 4, 5 kupacos változat tömören a $*3 + *4 + *5$ összeg.

Könnyen belátható, hogy a pártatlan játékok kommutatív csoportot alkotnak ezzel az összeggel. Megjegyezzük, hogy $*0$ csak egy lehetőség a csoport zéruselemére, bármely veszteső játék is az. $G \equiv H$ ha minden J -re $G + J$ pontosan akkor nyerő ha $H + J$ is az. Ezzel az ekvivalencia relációval faktorizálva egyszerűsödik a csoport. Két nyerő játék nem szükségképpen ekvivalens, de a vesztesők mind ekvivalensek a $*0$ -val és így egymással is.

I. rész

Klasszikus matematikai játékok

2. fejezet

Meghatározatlan játékok

Zermelo tétele szerint egy véges lépésből álló játékban eldönthető a kimenetel. A végtelen játékokban nem ez a helyzet, erre az első példát 1928-ban adta Stefan Banach és Stanisław. Mazur. Legyen $A \subset [0, 1]$ tetszőleges, és $B := [0, 1] \setminus A$. Az A -val illetve B -vel jelölt játékosok felváltva választanak valódi, zárt intervallumokat úgy, hogy $[0, 1] \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots, i \in \mathbb{N}$. A nyer, ha $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \cap A \neq \emptyset$, B nyer különben. Ez a Banach-Mazur, vagy (A, B) -játék. Legyen továbbá $\bar{S} := \mathbb{R} \setminus S$

Megmutatható, hogy

(1) A B játékosnak van nyerő stratégiája az (A, B) -játékban akkor és csak akkor, ha az A halmaz Baire első kategóriájú¹.

(2) Az A játékosnak van nyerő stratégiája az (A, B) -játékban akkor és csak akkor, ha az $B \cap I_1$ halmaz Baire első kategóriájú.

(3) Létezik olyan S halmaz, hogy $S \cap C$ és $\bar{S} \cap C$ sem üres, ha C tetszőleges nem megszámlálható halmaz.²

A fentiek szerint ha $A := [0, 1] \cap S$, akkor egyik játékosnak sincs nyerő stratégiája. Később egyszerűbb példákat is adtak, Gale-Stewart játék (1953) illetve az Ultrafilter játék, McKenzie és Paris, 1972.

2.1. A Gale-Stewart játék

A Gale-Stewart játék lényegében egy olyan $\Gamma = (T, F)$ játék, amelyben T egy végtelen bináris fa. Másképpen I és II felváltva adják meg egy végtelen $\{0, 1\}$ sorozat elemeit,

¹Egy halmaz első kategóriájú, ha előáll megszámlálható sok sehohsem sűrű halmaz uniójaként.

²Az ilyen tulajdonságú halmaz az ún. *Bernstein halmaz*.

és ha az eredmény egy adott $A \subset \{0, 1\}^\omega$ -beli sorozat, akkor I nyer, különben pedig II nyer. Az egyszerűség kedvéért I -et A , II -t B játékosnak nevezzük.

2. Tétel. *Van olyan $A \subset \{0, 1\}^\omega$, hogy a hozzátartozó Gale-Stewart játékban egyik játékosnak sincs nyerő stratégiája.*

Bizonyítás: Először definiáljuk az A és B játékosok lehetséges stratégiáit. Az A játékos egy F stratégiája megmondja, hogy az eddigi választásokra mi legyen A következő lépése, azaz az $(a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}) \in \{0, 1\}^{2n+1}$ -re ad egy $a_{2n+2} \in \{0, 1\}$ értéket. Tehát F azonosítható egy f_1, f_2, \dots függvénysorozattal, ahol $f_i : \{0, 1\}^i \mapsto \{0, 1\}$. Hasonlóan értjük a B játékos lehetséges stratégiáit, míg ezek halmazait STR_A -val illetve STR_B -vel jelöljük. Ha adott $F \in \text{STR}_A$ és $G \in \text{STR}_B$, akkor $\langle F, G \rangle$ az az egyértelmű végtelen sorozat, amely az F és G stratégiák összecsapásával létrejön. Legyen továbbá $\mathcal{P}_F := \{\langle F, G \rangle : G \in \text{STR}_B\}$, és $\mathcal{P}_G := \{\langle F, G \rangle : F \in \text{STR}_A\}$. Belátjuk az alábbiakat:

- (i) STR_A és STR_B számossága egyaránt 2^{\aleph_0} .
- (ii) Minden $F \in \text{STR}_A$ és $G \in \text{STR}_B$ esetén \mathcal{P}_F és \mathcal{P}_G számossága egyaránt 2^{\aleph_0} .

Valóban, az $f_i : \{0, 1\}^i \mapsto \{0, 1\}$ függvények halmaza minden $i \in \mathbb{N}$ -re véges és legalább kételemű, ezért $|\mathcal{P}_F| = 2^{\aleph_0}$. $|\mathcal{P}_G| = 2^{\aleph_0}$ analóg módon.

Ha $F \in \text{STR}_A$ és $b = (b_1, b_2, \dots) \in \{0, 1\}^\omega$, akkor van olyan $G_b \in \text{STR}_B$, melyre a $\langle F, G \rangle$ játszma $2i$ -edik eleme éppen b_i . Így $|\mathcal{P}_F| \geq 2^{\aleph_0}$, $|\mathcal{P}_F| \leq 2^{\aleph_0}$, hisz $\mathcal{P}_F \times \mathcal{P}_G \subset \text{STR}_A \times \text{STR}_B$.

Az A és B halmazok konstrukciójához transfinit indukcióval olyan sorozatokat, *tanúkat*, keresünk, melyek vesztvé tesznek egy-egy stratégiát. Megmutatjuk, hogy

- (1) minden $F \in \text{STR}_A$ esetén van olyan $t_F \in \mathcal{P}_F \cap B$,
- (2) minden $G \in \text{STR}_B$ esetén van olyan $s_G \in \mathcal{P}_G \cap A$,
- (3) különböző stratégiákhoz különböző tanúk tartoznak.

Ehhez szükségünk lesz a rendszámok jólrendezésére, ami a ZF axióma rendszeren belül a kiválasztási axiómával ekvivalens. Amennyiben ez elfogadjuk, a játékosaink stratégiái indexelhetők azon α rendszámokkal, melyekre $\alpha < 2^{\aleph_0}$, azaz $\text{STR}_A = \{F_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ és $\text{STR}_B = \{G_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$.

Legyen $t_0 \in \mathcal{P}_{F_0}$ és $s_0 \in \mathcal{P}_{G_0}$ tetszőlegesen, de $t_0 \neq s_0$. Ha $0 < \alpha < 2^{\aleph_0}$ és t_β, s_β definiált minden $\beta < \alpha$ rendszámra, akkor

$$|\mathcal{P}_{F_\alpha} \setminus (\{s_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{t_\beta : \beta < \alpha\})| = 2^{\aleph_0}$$

és

$$|\mathcal{P}_{G_\alpha} \setminus (\{s_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{t_\beta : \beta < \alpha\})| = 2^{\aleph_0},$$

hisz 2^{\aleph_0} számosságú halmazokból náluk kisebb számosságú halmazokat vontunk ki. Így választhatunk belőlük egy t_α illetve s_α elemet úgy, hogy $t_\alpha \neq s_\alpha$.

Legyen végül $S = \{s_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ és $T = \{t_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$, A egy tetszőleges kiterjesztése S halmaznak úgy, hogy $A \cap T = \emptyset$ míg $B := \{0, 1\}^\omega \setminus A$.

Ekkor egyik félnek sincs nyerő stratégiája, hisz az A játékos F_α stratégiája veszít valamely G_β ellen, hisz $t_\alpha \in \mathcal{P}_{F_\alpha} \cap B$, míg a B játékos G_α stratégiája is veszít A valamely stratégiája ellen, hisz $s_\alpha \in \mathcal{P}_{G_\alpha} \cap B$. \square

2.2. Az ultrafilter játék

Ismét végtelen játékról lesz szó, ahol a játékosok felváltva lépnek és a limeszrendszámoknál az építő léphet. A játék teljes, azaz csak akkor értékelhető, ha az összes pont tartozik már valakihez.

Ha adott egy V halmaz akkor az $E \subset 2^V$ filter, ha

- $A, B \in E$, akkor $A \cap B \in E$,
- $A \in E$ és $A \subset B$, akkor $B \in E$
- $E \neq 2^V$, azaz $\emptyset \notin E$.

A Zorn lemma segítségével a bármely filter maximálissá bővíthető; ezt hívjuk *ultrafilternek*. A maximalitás miatt minden $A \in V$ -re teljeül, hogy az A és $V \setminus A$ halmazok közül pontosan az egyik eleme az ultrafilternek. Az \mathcal{U} ultrafilter *triviális*, ha van olyan $x \in V$, hogy $\mathcal{U} = \{A : x \in A\}$.

3. Tétel (McKenzie-Paris). *Tegyük fel, hogy $\mathcal{F} = (\omega, \mathcal{U})$ játékban, ahol $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ és \mathcal{U} egy nem-triviális ultrafilter az ω halmazon. Ekkor a teljes építő-romboló játék meghatározatlan \mathcal{F} -en.*

Bizonyítás: Ha egy teljes játék zajlik le (minden pont tartozik valamelyik játékoshoz), akkor pontosan az egyik játékos pontjai megegyeznek \mathcal{U} egy elemével. Így minden játéknak van győztese. Ha B -nek lenne nyerő stratégiája, azt felhasználhatná A is, azaz a stratégia lopás alkalmazható a végtelen játékokra is.

Tegyük fel, hogy A -nak van egy STR nyerő stratégiája és megmutatjuk, hogy valamilyen értelemben B el tudja ezt lopni. Ehhez egy egyszemélyes segéd játékot definiálunk, amit 3ω játéknak nevezünk. Ennek a táblája az ω három diszjunkt példányra, $\omega = \{0_i, 1_i, 2_i, \dots\}$, $i = 1, 2, 3$. B minden lépésben tetszés szerint választhat táblát és azon még választható számot. Az első lépést leszámítva A azon a táblán lép,

amelyen B utolsó lépése történt és azt a lépést az STR függvény jelöli ki. Így van ez az első lépésben is, csak azt minden táblán odaadjuk A -nak. Azaz ha $\text{STR}(\emptyset) = m$, akkor a játék az m_1, m_2 és m_3 számok A -hoz rendelésével kezdődik.

Végül pedig B akkor nyer, ha a teljes játék végén, az m -et kivéve minden $j \in \mathbb{N}$ esetén az $\{j_1, j_2, j_3\}$ halmazból legalább egy elemet megszerez.

4. Lemma. B megnyeri az egyszemélyes 3ω játékot.

Bizonyítás: A játék során két célt valósít meg B : megszerezi a megfelelő hármasok legalább egy elemét és módszeresen feltölti mindhárom táblát. Ez a következőképpen történhet. Egyrészt ha A elfoglalja egy $\{j_1, j_2, j_3\}$ halmaz két elemét, és a harmadik elem még szabad, B azonnal elveszi ezt. Másrészt ha az előbbi kényszer nem áll fenn, B elveszi a választható szabad elemek közül a legkisebbet (egyenlőség esetén használjuk a $j_1 < j_2 < j_3$ rendezést). Bármely $n \in \mathbb{N}$ -re B első n lépésének legfeljebb a fele fogja az első célt szolgálni, így mindhárom táblán az első $\lfloor n/6 \rfloor$ feltöltődik. Azaz a játék végére, végtelen sok lépés után, a tábla minden eleme az egyik játékosé lesz, minden $\{j_1, j_2, j_3\}$ halmazból $j \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$ esetén pedig legalább egy elemet B vesz el. \square

Ha STR nyerő algoritmus lenne a $\mathcal{F} = (\omega, \mathcal{U})$ játékban, akkor az ω mindhárom példányán A pontjai \mathcal{U} elemei lennének. A metszetük viszont a 4. Lemma miatt m , ami ellentmond annak, hogy \mathcal{U} ultrafilter. \square

3. fejezet

Conway elmélet

Conway összeolvastotta Dedekind, Cantor és Neumann konstrukcióit, melyekből általános játék és számfogalmat hozott létre. A felépítés rekurzív, ha L és R játékok halmazai, akkor az $\{L|R\}$ is egy játék. Az x^R (x^L) az R (L) halmaz általános elemét jelenti, Jobb és Bal a két játékos. Egy lépés abból áll, hogy Jobb (Bal) egy x^R (x^L) egy elemet választ, ezen folyik a játék tovább és aki nem tud lépni, veszít.

Definiálhatunk egy parciális rendezést a játékokon, $x \geq y$, ha $x^R \leq y$ és $x \leq y^L$ egyike sem teljesül bármely x^R, x^L esetén. Egy $x = \{L|R\}$ szám, ha minden x^R, x^L is szám és nem teljesül egyikre sem a $x^R \leq x^L$.

Az első játék és egyben szám a $\{\mid\}$, azaz $L = R = \emptyset$. Az x és y azonos, $x \equiv y$, ha a halmazaik megegyeznek, *egyenlő*, $x = y$, ha $x \leq y$ és $y \leq x$. Játékok összegét, szorzatát úgy definiáljuk, hogy a számokra megfeleljen a Dedekind szeletnél használt intuíciónak: ha $x = \{L|R\}$, akkor $x \not\leq x^L$ és $x^R \not\leq x$. A x és y játékok $x + y$ összegére szemléletesen úgy is tekinthetünk, hogy a lépésen levő fél eldöntheti, melyikből választ. Azaz $x + y := \{x^L + y, x + y^L | x^R + y, x + y^R\}$, $-x := \{-x^R | -x^L\}$ és $xy := \{x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R | x^L y + xy^R - x^L y^R, x^R y + xy^L - x^R y^L\}$.

Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy a játékok testet, a számok rendezett testet alkotnak, ahol $0 := \{\mid\}$. Az $1 := \{0|\}$ és $-1 := \{|\ 0\}$ szintén szám, míg a $\{0|0\}$ nem az és nem is hasonlítható össze velük. Az azonosság és az egyenlőség emiatt különbözik és amíg egy $x = \{L|R\}$ számot egyértelműen meghatároz L legnagyobb és R legkisebb eleme, előfordul, hogy $x = y$ de $xz \neq yz$, ha x, y, z nem számok.

Néhány példa számokra: $2 := \{1|\} = \{-1, 1|\} = \{0, 1|\} = \{-1, 0, 1|\}$, $-2 := \{|\ -1\} = \{|\ -1, 0\} = \{|\ -1, 1\} = \{|\ -1, 0, 1\}$, $1/2 := \{0|1\} = \{-1, 0|1\}$, $-1/2 := \{-1|0\} = \{-1|0, 1\}$.

Folytatva ω lépésen át (és tovább) megkapjuk a játékokat és a számokat; utóbbiakba beágyazható a valós számtest. De megtalálhatjuk Leibniz infinitezimálisait,

például $1/\omega = \{0|1, 1/2, 1/4, \dots\}$, rákövetkező rendszámot $\omega + 1 = \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$ és ami eddig nem volt, megelőzőt is $\omega - 1 = \{0, 1, 2, \dots | \omega\}$. Indukcióval kaphatók a $\omega - n = \{0, 1, 2, \dots | \omega, \omega - 1, \dots, \omega - (n - 1)\}$, $\omega/3$ vagy éppen $\sqrt{\omega} = \{0, 1, 2, \dots | \omega, \omega/2, \omega/4, \dots\}$ egzotikus számok.

Egy-egy bonyolultabb szám vagy játék meghatározásánál nagyon hasznos az ún. egyszerűségi tétel:

5. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $x = \{L|R\}$ játékra van olyan z szám, hogy $x^L \not\geq z \not\geq x^R$ minden x^L, x^R -re, de z részei, nem már teljesítik ezt.¹ Ekkor $x = z$.*

Bizonyítás: Az $x \geq z$, kivéve, ha $x^R \leq z$ vagy $x \leq z^L$. A tétel feltétele egyből kizárja az $x^R \leq z$ lehetőséget, míg az $x \leq z^L \Rightarrow x^L \not\geq x \leq z^L < z \not\geq x^L$ minden x^R, x^L -re, amiből $x^L \not\geq z^L \not\geq x^R$, ami a minimalitásnak mond ellent. Azaz $x \geq z$ és hasonlóan belátható $z \geq x$, amiből $x = z$. \square

A 5. tétel segítségével megmutatható, hogy a $\{\}$ -ből indulva véges lépésben pontosan a *diadikus racionális* számokat, azaz a $m/2^n$, $m, n \in \mathbb{Z}$ kaphatjuk meg. Legyen egy x valós, ha $x = \{x - (1/n)|x + (1/n)\}_{n>0}$. A valósok zárt testet képeznek a számain között és azonosíthatók a szokásos valós számokkal.

¹Azaz vagy $z^R \leq x^L$, vagy $z^L \geq x^R$ valamely választásra.

4. fejezet

Pozíciós játékok

A *pozíciós játék* pontos definíciója nem adható meg, mindenféle játékot beleérthetünk, ahol a nyereség feltétele valamely alakzat eléréséhez/elkerüléséhez kapcsolódik. Első közelítésben *pozíciós játék*, vagy *hipergráf játék* alatt a következőt értjük. Adott egy $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráf, azaz $\mathcal{H} \subset 2^V$. A V halmaz elemei alkotják a *táblát*, míg az \mathcal{H} elemei az ún. *nyerő* halmazok. Két játékos, a kezdő és a második, vagy I és II , felváltva választja a tábla elemeit. Amelyikük elsőként megszerezi egy nyerő halmaz összes elemét az megnyeri a játékot.

Az X játékos nyer (döntetlent ér el) kifejezés alatt azt értjük, hogy mindkét játékos tökéletes játéka esetén ez lenne az eredmény. Ha a tábla véges, akkor használhatjuk az alábbi tételt:

6. Tétel (Zermelo-Neumann, [12, 22]). *Egy teljes információs, véges, kétszemélyes játékot vagy az egyik játékos nyeri vagy a játék döntetlen.*

Megjegyzés. A 6. tételre Zermelo adott bizonyítást¹, így többnyire Zermelo tételként, vagy ún. játékelméleti *tertium non datur*² elvként hivatkozzák.

Példa 1. Tic-Tac-Toe. I és II felváltva tesz egy jelet a 9 négyzetből álló, 3×3 -as tábla egy-egy mezőjére. Aki hamarabb elfoglal egy teljes sort, oszlopot vagy főátlót, az nyer.

Példa 2. Tic-Toc-Tac-Toe. Ez a Tic-Tac-Toe 3-dimenziós változata, aminek a táblája $4 \times 4 \times 4$ -es kocka. A nyerő halmazok a sorok, oszlopok, lap és test főátlók, összesen 76 darab.

¹Az első bizonyítás hiányos volt, ezt később König Dénes és Kalmár László javította ki, lásd [22].

²Azaz a *harmadik eset nem létezik*. Végtelen játékokra más a helyzet, u. i. a *kiválasztási axióma* használatával készíthető olyan játék, amelynek kimenetele *eldönthetetlen*.

Példa 3. Amőba (5-in-a-row). Itt a tábla a végtelen négyzetrács (a gyakorlatban lehet a 19×19 -es go tábla vagy füzetlap). A játékosok felváltva jelölik a mezőket, s aki hamarabb képes öt, egymást követő mezőt vízszintesen, függőlegesen vagy átlós irányban elfoglalni, az nyer.

Példa 4. k -amőba (k -in-a-row). A fentihez hasonló, csak ebben k egymást követő jel kell a nyereshez.

A gyakorlatból tudjuk, a kezdőjátékos (itt I) előnyös helyzetben van a fentiekben. Ezt matematikai eszközökkel is belátható, sőt sokkal általánosabban igaz:

7. Tétel (Hales-Jewett, [36]). *Bármely (V, \mathcal{H}) hipergráf játékban a kezdő nyer, vagy döntetlen az eredmény.*³

Bizonyítás: Ez az ún. *stratégia lopás* módszerrel⁴ kapható meg. Általános pozíciós játékokra Alfred Hales és Robert Jewett mondta ki a [36]-ben. Ha II nyerne, azaz lenne *nyerő stratégiája*⁵, akkor I is használhatná ezt, hiszen a saját, korábbi lépései sohasem ártanak. Vagyis I megfélekedezhet az első lépéséről, és ha a stratégia ezt kérné, akkor úgy tehet, mintha éppen most lépné meg ezt, és az esedékes lépését tetszőlegesen helyezheti el. \square

Az 6. és 7. tételek sokszor megmondják, *mi* lesz az eredmény, de arról keveset árulnak el, *hogyan* játszunk. Ez már a példáinkban sem egyszerű, általában még kevésbé várható. A tic-tac-toe könnyen láthatóan döntetlen, míg a tic-toc-tac-toe-t I nyeri. Az utóbbi igazolásához viszont 1500 óra gépidőt használt fel Oren Patashnik a hetvenes évek végén, és megjegyezhető nyerő stratégiát eddig nem találtak rá, lásd [16, 51]. Az amőbát (legalábbis a go táblán) a kezdő nyeri, a k -amőba pedig döntetlen, ha $k \geq 8$. A $k = 6, 7$ esetén viszont nem tudjuk, mi az igazság, lásd [2, 16, 32].

Általában sincs ez másképpen, sok kérdésre van jó válaszunk, még többre viszont nincs. A pozíciós játékoknak számtalan meglepő kapcsolata van a matematika egymástól távolos területeivel; ezért is olyan nehezek és egyben vonzóak a problémái. Ezekre láthatunk újabb példákat a továbbiakban.

4.1. Topológikus játékok

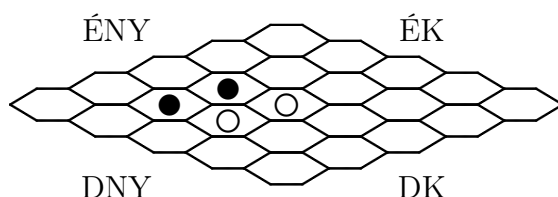
Kezdjük a hex játékkal; ezt Piet Hein 1942-ben, lásd [39] és John Nash 1948-ban találta ki egymásról nem tudva. Egy hatszögekből álló, rombusz alakú $n \times n$ -es

³Ha egyik fél sem nyer véges lépésben, akkor döntetlennek tekintjük a játékot.

⁴A módszert először John Nash alkalmazta a hex játék vizsgálatára, lásd [16, 29].

⁵A stratégia egy f függvény, amely a tábla egy állapotához a teendő lépést rendeli.

táblára felváltva helyezhet I fehér és II fekete korongokat. I célja egy összefüggő fehér út létrehozása az északnyugati és délkeleti, II -é pedig egy fekete úté az északkeleti és délnyugati oldalak között. A hex - ellentétben jónéhány csak matematikai szempontból érdekes játékkal - izgalmas, addiktív játék. Feladványokat közölnek, versenyeket rendeznek belőle; ilyenkor az $n = 10$ vagy $n = 11$ a tábla méret. (A legjobb eredményt Kohei Noshita érte el, $n \leq 8$ -ra ismert a nyerő stratégia, lásd [49].)



Az 5×5 -ös hex tábla.

Az első definíciónk értelmében a hex *nem* hipergráf játék, hiszen a nyerő halmazok *nem egyformák* a két játékosra. Érdekes tehát a $(V, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *asszimmetrikus* hipergráf játékot bevezetni, ahol értelemszerűen az I illetve II akkor nyer, ha a \mathcal{H}_1 illetve a \mathcal{H}_2 egy elemét hamarabb elfoglalja, ahol $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subset 2^V$.

Nyilvánvalónak tűnik, hogy csak az egyik játékos nyerhet a hexben. Ez így is van, de ekvivalens a szintén egyszerűnek tűnő *Jordan-féle görbetétellel*⁶. Szintén előkelő rokonsága van a topológiában az alábbi, ún. *hex tételnek*:

8. Tétel (Nash-Gale). *Ha a hex tábla összes mezőjét kiszínezzük fehérrel vagy feketével, akkor vagy lesz fehér északnyugati-délkeleti, vagy fekete északkelet-délnyugati út.*

Azaz döntetlen még akkor sem lehetséges, ha a két játékos erre törekedne. Kombinálva ezt az eredményt a 7. tétel ötletével (és felhasználva, hogy a \mathcal{H}_1 képe egy megfelelő tengelyes tükrözésnél éppen a \mathcal{H}_2) kapjuk, hogy:

9. Tétel (John Nash, 1949). *A kezdő játékos nyer a hexben.*⁷

⁶Egy egyszerű, zárt görbe a síkot két - egy külső és egy belső - összefüggő részre osztja.

⁷A tétel a pozíciós játékok talán legismertebb eredménye. Ugyanakkor egy tisztán egzisztencia bizonyítás, amelyben a létezésén kívül semmit sem tudunk meg a nyerő stratégiáról. Nagyon nehéz, ún. PSPACE-teljes probléma megmondani, hogy *melyik* fél nyer, ha adott az $n \times n$ -es hex tábla egy részleges kitöltése, [60].

Visszatérve a topológiai kapcsolatokra, 1979-ben igazolta David Gale, hogy a hex tétel és a *Brouwer-féle fixpont tétel* ekvivalensek, lásd [29]. Vele egyidőben, tőle függetlenül Lovász László az ún. *Sperner lemmából* vezette le a hex tételt klasszikus könyvében, [47, 48]. Ehhez hasonló módon bizonyították Hochberg és társai [40], hogy a Sperner lemmából következik az ún. *konnektor tétel*. Később Chris Hartman foglalta össze egy nagyon gazdaságos ciklikus bizonyításban a következő eredményeket, lásd [38]. Az egyszerűség kedvéért a 2-dimenziós eseteket mondjuk ki, az n -dimenziós eset a fenti cikkben elérhető.

Legyen T az ABC háromszög egy háromszögezése, melynek a pontjai az alábbi módon színezettek: (i) Az A , B és C pontok színei rendre 1, 2 és 3. (ii) Az ABC háromszög oldalain fekvő pontok az oldal egyik végpontjának a színét kapják.

Sperner lemma: T -ben van olyan háromszög, amelynek csúcsai három különböző színt kaptak.

Legyen G egy, a külső oldalát kivéve, háromszög lapokból álló síkgráf. Rögzítsük a külső oldalon az x, y, z pontokat ebben a körüljárási irányban. Az $[x, y]$ intervallum az x -et, y -t és a köztük lévő pontokat jelenti. (Az $[y, z]$ és $[z, x]$ analóg módon.) G pontjainak egy C részhalmaza *konnektor*, ha a C által feszített részgráf összefüggő, és tartalmaz pontot az $[x, y]$, $[y, z]$ és $[z, x]$ intervallumok mindegyikéből.

Konnektor tétel: Ha két színnel színezzük a fenti módon definiált G pontjait, akkor abban lesz egy C egyszínű konnektor.⁸

Legyen $e_1 = (1, 0)$ és $e_2 = (0, 1)$ a koordinátatengelyekkel párhuzamos egységvektorok, és az $a, b \in \mathbb{Z}^2$, melyre $a_i \leq b_i$ $i = 1, 2$ -re. A $D(a, b)$ doboz pedig a következő pontok halmaza: $D(a, b) := \{(x_1, x_2) : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ és } x_i \text{ egész } i = 1, 2\}$. D két pontja *szomszédos*, ha mindkét koordinátájuk legfeljebb egy egységgel tér el.

Pouzet lemma: Ha egy $f : D(a, b) \mapsto \{\pm e_1, \pm e_2\}$ függvényre minden $x \in D(a, b)$ -re teljesül az $x + f(x) \in D$, akkor vannak olyan szomszédos x és y pontok, hogy $f(x) = -f(y)$.

A teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy a hex tábla felfogható, mint az előbbi D . Ebben $x, y \in D$ akkor szomszédosak, ha $x - y$ vagy $y - x$ eleme $\{0, 1\}^2$ -nak, és az egyik játékosnak a D doboz alsó és felső, a másiknak a jobb és bal oldalát kell összekötni. Hasonlóan történhet d -dimenziós hex tábla megadása is.

Brouwer-féle fixpont tétel: Ha egy f folytonos függvény az R^2 egységgömbjét önmagába viszi, akkor van olyan x , melyre $f(x) = x$.

⁸Craige Schensted és Charles Titus, illetve Claude Shannon már 1952-ben bevezette az ún. y -játékot. Ennek a táblája a szabályos háromszög rács szintén szabályos háromszög alakú darabja és a cél egy konnektor megszerzése, ahol a háromszög csúcsai a rögzített pontok. A konnektor tétel miatt az y -játék nem lehet döntetlen, így azt a 7. tétel miatt a kezdő nyeri.

Cris Hartman az alábbi utat adja a [38]-ben: Sperner lemma \Rightarrow konnektor tétel \Rightarrow hex tétel \Rightarrow Pouzet lemma \Rightarrow Brouwer-féle fixpont tétel ⁹ \Rightarrow Sperner lemma.

Bizonyítás: Sperner lemma: Egy erősebb állítást mutatunk meg, azt, hogy páratlan sok hároszínű háromszög van. Legyen G a háromszögezés duális egy részgráfja: két pont közt lévő duál él akkor kerül $E(G)$ -be, ha a köztük lévő háromszögezésbeli él címkéi 1 és 2. A végtelen tartományhoz rendelt pont páratlan fokú G -ben, így van még G -ben páratlan sok páratlan fokszámú pont. Az ezekhez tartozó háromszögek csúcsai hároszínűek.

Sperner lemma \Rightarrow konnektor tétel. Tegyük fel, hogy van konnektormentes színezés az 1, 2 számokkal. Készítünk egy új színezést: egy x pont kapja annak a legkisebb indexű oldalnak a címkéjét, amelyből *nem* érhető el (az eredeti színezés szerinti) egyszínű úton. Ezzel a pontokat jól színeztük, a Sperner lemma szerint van hároszínű T -beli háromszög. T két szomszédos csúcsa viszont azon színű volt eredetileg, így azonosnak kellene lenni az új színezésben is.

konnektor tétel \Rightarrow hex tétel. Adjunk hozzá a hextáblához egy fehér és egy fekete pontot. A fehéret kössük össze a fehér játékos egyik céloldalával, a fekete pontot a fekete játékos egyik céloldallal és a két új pontot egymással. Ez felfogható mint egy háromszög háromszögezése és tartalmaz konnektort. A konnektor megad egy utat a hextábla valamelyik két szembefekvő oldala közt is.

hex tétel \Rightarrow Pouzet lemma. Vegyünk egy, a Pouzet lemma feltételének eleget tevő f függvényt a $D(a, b)$ dobozon, és legyen két pont szomszédos a hex beli szomszédság szerint. Szíezzük az x pontot az $f(x)$ dimenziójával, azaz 1-el, ha $f(x) \in \{-e_1, e_1\}$, 2-vel különben. Legyen az e_i -re merőleges céloldalak színe i , $i = 1, 2$. A hex tétel miatt lesz egyszínű P út például a két függőleges oldal közt; ez csupa 1-es címkéjű. Ekkor ha x a P út bal szélő eleme, akkor $f(x) = e_1$, ha y a jobb szélő, akkor $f(y) = -e_1$. A P csak az e_1 és a $-e_1$ váltakozhat, lesz tehát két szomszédos u és v , melyre $f(u) = e_1$, $f(v) = -e_1$.

Pouzet lemma \Rightarrow Brouwer-féle fixpont tétel. Tegyük fel, hogy $f : D \rightarrow D$ folytonos a D téglalapon és nincs fixpontja. Ezzel jól definiált lesz az g függvény amely az $f(x) - x$ szögét veszi fel x -ben. Mivel g abszolútt folytonos is, vehető olyan sűrű rács D -ben, hogy g változása a szomszédos pontok közt kisebb, mint $\pi/2$. Legyen h az a rácsponatokon értelmezett függvény, amely a $\{\pm e_1, \pm e_2\}$ halmazból az az értéket veszi fel x -ben, ami a legkisebb szöveget zárja be $f(x) - x$ -szel. A Pouzet lemma szerint lesznek olyan x, y szomszédos pontok, melyekre $h(x) = -h(y)$, ami ellentmondás, hiszen a g szerint $f(x) - x$ és $f(y) - y$ kisebb, mint $\pi/2$ radián szöveget zár be.

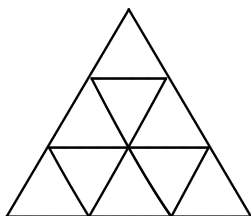
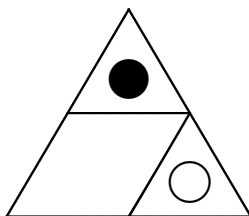
⁹Természetesen a véges módszerek csak ϵ -approximációt adhatnak. Azaz adott $\epsilon > 0$ -ra olyan x létezését, amelyre $\|f(x) - x\|_2 < \epsilon$. A fixponthoz még a szokásos kompaktsági érvelés szükséges.

Brouwer-féle fixpont tétel \Rightarrow Sperner lemma. Legyen f egy jó címkézése a T háromszögnek, amelynek még sincs háromszínű háromszöge. Írjuk fel az x pontot mint az őt tartalmazó kis háromszög v_0, v_1, v_2 csúcsvektorainak konvex kombinációja $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Legyen g az a függvény, ami az $x = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ ponthoz a $\alpha_0 V_1 + \alpha_1 V_2 + \alpha_2 V_0$ pontot rendeli, ahol V_0, V_1, V_2 a T háromszög csúcs pontjaihoz tartozó vektorok. Mivel nincs háromszínű kis háromszög T -ben, g minden pontot T valamelyik oldalára képez. Az oldalakat is felcseréli, azaz nincs fixpontja, ami ellentmond a Brouwer fixpont tételnek. \square

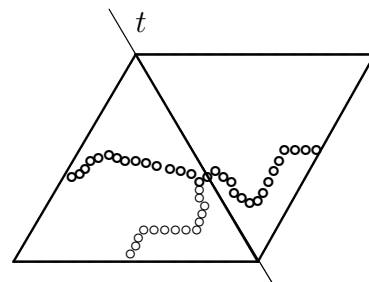
Természetesen az egyes állítások közti kapcsolat megmutatása másképp is lehetséges.

Bár a konnektor tételt (és az y -játékot) a hex tétel (hex játék) általános formájának tartják, bár mint látható ekvivalensek. Az egymásból levezethetőség igazából mindkét irányban *könnyű*, amely az alábbi ábrán látható.

A baloldal a 4-es y -játék; vegyük észre, hogy a szomszédosság a gráfon olyan, mint a hexben a mezők között. A középső ábrán egy kitöltött hex táblát kiegészítettünk egy csupa fehér ill. fekete pontot tartalmazó háromszöggel, amely egy lejátszott y -játékra vezet.

A 4×4 -es y -játék tábla.

A kiegészített hex tábla.

A t -re tükrözött y -játék.

A konnektor tétel miatt van egy egyszínű konnektor, de ez egy egyszínű nyerő halmazt jelent az eredeti hex táblán. Végül a jobboldali ábrán egy lejátszott y -játék tábláját tükrözzük a t -tengelyre, a szélső sort félbevágva. Ezzel egy (szimmetrikusan) kitöltött hex táblát kapunk. A hex tétel miatt létező nyerő halmaznak az eredeti táblából kilógó részeit „visszatükrözve” egy egyszínű konnektort kapunk.

Sávszélesség. Hochberg és társai [40]-ben a konnektor tétel felhasználásával a T_n , az n oldalélű háromszögrács (y -játék tábla) *sávszélességére* adtak alsó korlátot.¹⁰ A

¹⁰Legyen $G = (V(G), E(G))$ egy egyszerű gráf. Az η címkézés $V(G)$ bijekciója $\{1, \dots, |V(G)|\}$ -be. Az η *sávszélessége* $B(\eta, G) = \max\{|\eta(u) - \eta(v)| : uv \in E(G)\}$. A G gráf *sávszélessége* $B(G) :=$

sávszélesség meghatározása már speciális gráfokra is nehéz feladat; valójában már 3 maximális fokszámú fákra is NP-teljes, [33]. Meglepő tehát, hogy egy nem triviális esetben a játékok segítenek ebben.

Fordított játékok. A hex tétel felveti az ún. *fordított játék*, (a [16]-ben *misère game*) lehetőségét. Általában egy fordított játékban az nyer, aki az eredetiben veszítene. A fordított hex sem lehet döntetlen, a stratégia lopás egy kifinomult változatával mutatható meg az alábbi tétel a [43]-ből:

Misère hex tétel: A kezdő nyer a fordított $n \times n$ -es hexben, ha n páros, különben a második nyer. Továbbá a vesztes félnek van olyan stratégiája, amellyel nem veszít a tábla összes mezejének elfoglalása előtt.

Vegyük észre, hogy az állítás második feléből következik az első; ezen alapszik az említett stratégia. Megmutatható, hogy gondolatmenet alkalmazható a fordított y -játékokra is, ott a tábla pontszámának, $|V(T_n)|$, paritásán múlik a nyereség, páros méretre I , páratlanra II nyer. Hasonlóan definiálhatjuk a fordított hipergráf játékokat, amelyek, ha lehet, még nehezebbek, mint a normál változat, hiszen a 7. tétel sem használható rájuk.¹¹

4.2. Párosítások és matroidok

Nagyon hatékony eszköz a játékelméletben a párosítás. Egy klasszikus feladatban I és II egyforma érméket helyez egy kör alakú asztalra. Az átfedés nem megengedett, és az veszít, aki nem tud lépni. A kezdő könnyen nyer a középpontba téve, majd az ellenfél lépéseit erre tükrözve. (Persze ha az asztal nem középpontosan szimmetrikus, alig tudunk valamit.) Egy tengelyes tükrözéssel nyerhető a $n \times (n + 1)$ -es hex is a közelebbi oldalakat összekötni kívánó félnek, [16, 31].

A hipergráf játékok párosítási stratégiái a [36]-ből származnak. Alfred Hales és Robert Jewett vezette be a $HJ(n, d)$ -vel jelölt játékokat, ahol n és d természetes számok. A $HJ(n, d)$ táblája egy d dimenziós kocka, amelyik n^d kisebb kockából van összerakva úgy, hogy a nagy kocka minden éle mentén n kis kocka fekszik. Formálisan a hipergráf alaphalmaza a d hosszú sorozatok, ahol minden koordináta egy 1 és n között lévő egész szám, azaz $V(HJ(n, d)) = \{1, \dots, n\}^d$. A hipergráf élei azon n elemű részhalmazok, melyeknek elemei sorba rendezhetőek oly módon, hogy egy rögzített koordinátában az $1, 2, \dots, n$, az $n, n - 1, \dots, 1$ vagy konstans értéket vesznek

$\min_{\eta} \{B(\eta, G)\}$. $B(T_n) = n + 1$, míg például a az $n \times n$ -es négyzetláncra, a $P_n \times P_n$ -re $B(P_n \times P_n) = n$.

¹¹Ebben a sokkal általánosabb *kombinatorikus játékokra* hasonlítanak, bővebben [16, 21].

fel a sorozatok. Persze a $HJ(3, 2)$ nem más, mint a tic-tac-toe, a $HJ(4, 3)$ pedig a tic-toc-tac-toe.

Definíció: Egy $\chi : V \mapsto \{1, \dots, k\}$ az $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráf jó színezése, ha minden $A \in \mathcal{H}$ halmaz képe legalább kételemű. A minimális k , amelyre van jó színezés, \mathcal{F} kromatikus száma, jele $\chi(\mathcal{F})$.

Ha egy \mathcal{F} hipergráfra a $\chi(\mathcal{F}) > 2$, akkor a rajta értelmezett ott játék nem végződhet döntetlenül. Az y-játék mellett például a $HJ(3, 3)$ is ilyen. Másrészt a $HJ(4, 3)$ példa arra, hogy I -nek lehet nyerő stratégiája egy $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ játékban akkor is, ha $\chi(\mathcal{F}) = 2$.

Hales-Jewett tétel: Bármely n természetes számra létezik olyan $d > 0$ egész, hogy a $HJ(n, d)$ játék hipergráfjának kromatikus száma nagyobb, mint kettő.

Így az a kérdés, milyen n és d mellett érhet el döntetlen II ? Ennek kimondásához szükség van az ún. König-Hall tételre, lásd [47].

Adott véges halmazoknak egy $\{A_i\}_{i=1}^m$ véges rendszere. Egy $S = \{s_i\}_{i=1}^m \subseteq \cup_{i=1}^m A_i$ diszjunkt reprezentáns rendszer, ha $s_i \neq s_j$, $i \neq j$ -re és $s_i \in A_i$ az $i = 1, \dots, m$ esetén.

10. Tétel (König D.-Ph. Hall). *A véges halmazokból álló $\{A_i\}_{i=1}^m$ halmazrendszernek pontosan akkor létezik diszjunkt reprezentáns rendszere, ha minden $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ esetén $|\cup_{i \in I} A_i| \geq |I|$.¹²*

11. Tétel (Hales-Jewett). *Ha egy véges $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráf játékban minden $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ esetén $|\cup_{A \in \mathcal{G}} A| \geq 2|\mathcal{G}|$, akkor a játék döntetlen.*

Bizonyítás: Ha $\mathcal{H} = \{A_1, \dots, A_m\}$, legyen $\mathcal{H}^* = \{A_1, A_1^*, A_2, A_2^*, \dots, A_m, A_m^*\}$, ahol $A_i = A_i^*$ minden $i = 1, \dots, m$ -re. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $|\cup_{A \in \mathcal{G}} A| \geq 2|\mathcal{G}|$ feltételből következik, hogy minden $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{H}^*$ választásra $|\cup_{A \in \mathcal{G}^*} A| \geq |\mathcal{G}^*|$, azaz a \mathcal{H}^* rendszerre alkalmazható az 10. tétel. Legyen a diszjunkt reprezentáns rendszer $S = \{a_1, a_1^*, a_2, a_2^*, \dots, a_m, a_m^*\}$. II kövesse az alábbi stratégiát: Valahányszor I választ egy elemet S -ből (a_i -t vagy a_i^* -ot), akkor II válassza a megegyező indexűt (a_i^* -ot vagy a_i -t), különben tetszőlegesen léphet. I nem szerezheti meg A_i összes elemét egyetlen $i = 1, \dots, m$ -re sem, mert az $a_i, a_i^* \in A_i$ közül legalább az egyiket II szerzi meg. \square

Vegyük észre, hogy a $HJ(n, d)$ hipergráfban minden pont legfeljebb $\frac{1}{2}(3^d - 1)$ nyerő halmaznak eleme, ha n páratlan. Páros n -re ez a szám $2^d - 1$. Így a 11. tételt alkalmazza egyből kapjuk:

¹²König Dénes a tételt páros gráfokra vonatkozó alakban mondta ki. *Marshall Hall Jr.* 1949-ben belátta olyan végtelen halmazrendszerekre, amelyekben minden pont fokszáma véges, [37].

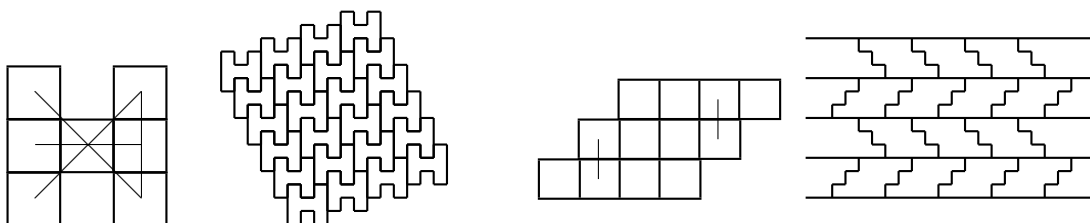
12. Tétel (Hales-Jewett, 1963). *A $HJ(n, d)$ döntetlen, ha $n \geq 3^d - 1$ és $n = 2l + 1$, vagy ha $n \geq 2^{d+1} - 2$ és $n = 2l$.*

Párosítási stratégiával ennél sokkal jobb korlát nem adható, más módszerrel viszont, ahogy azt látni fogjuk, igen. A fordított játék a paritástól (is) függ, I (II) nem veszít a fordított $HJ(n, d)$ -ben, ha d páratlan (páros).¹³

A 11. tételt (Marshall Hall Jr. javításával) alkalmazhatjuk a végtelen táblán játszott k -amőbára. Ez $k \geq 15$ esetén döntelent ad. Ha d -dimenziós táblán játszunk, akkor ez a korlát $k \geq 2(3^d - 1) - 1$, [53]. Hales és Jewett megadott egy párosítást, amely $k \geq 9$ -re döntelent ad, de ez nem a 11. tétel alapul, [16].

Segédjátékok. Egy párosítás nem más, mint a tábla szétvágása kisebb, könnyebben áttekinthető részekre. A résztáblákon a játékos egymástól független új, segédjátékokat játszik, amelyek együttesen a céljához segítik.

Ennek egyik első példája Shannon és Pollak ötlete, amellyel a 9-amőbára adtak döntetlen stratégiát. Ezt megjavította egy, a T. G. L. Zettters álneven¹⁴ színre lépő holland matematikus csoport, belátván, hogy már a 8-amőba is döntetlen, [16, 35].



A Shannon-Pollak parkettázás.

A T. G. L. Zettters parkettázás.

II , ha lehetséges, azon a résztáblán/parkettán lép, mint I . A Shannon-Pollak parketta nyerő halmazait a vékony vonal jelöli; ez négy darab, három elemű halmaz. A T. G. L. Zettters parketta nyerőhalmazai a parketta három sora, négy 45 fokos átlója és a két, vékony vonallal jelölt pár. Egy kis munkával ellenőrizhető, hogy (i) a segédjátékokban nem veszít II , (ii) ha I nem nyer legalább egy segédjátékban, akkor nem nyerheti meg a 9- illetve 8-amőbát sem.

Valójában a fentiekben erősebb állításokat igazoltunk, mint amiket kimondtunk. A kezdő játékos akkor sem tud nyerő halmazt megszerezni, ha a másodiknak nincs

¹³A $\{1, \dots, n\}^d$ kocka középpontjára szimmetrikus lépésekkel ez elérhető. Ha n páratlan, I elfoglalhatja a centrumot, különben II játszhat középpontos tükrözéssel.

¹⁴Az álnev régi fogás a matematikában, amikor úgy véli egy szerző, hogy támadásoknak lehet céltáblája a munkája miatt, pl. *Student*, *Blanche Descartes*, *Bourbaki*, *Alon Nilli* stb. (A T.G.L. Zettters álnev Andries Brouwer holland matematikust fedi.)

lehetősége ellentámadni. Azaz hiába szerez meg II egy nyerő halmazt, a játék folyik tovább. Ez a pozíciós játékok ún. *építő-romboló* (Maker-Breaker) változata, ahol az építő akkor nyer, ha megszerez egy nyerő halmazt, míg a romboló akkor, ha ezt megakadályozza.¹⁵ Ha II rombolóként nyer ebben az építő-romboló változatban, akkor döntetlene van az eredetiben is. Fordítva ez nem igaz, a tic-tac-toe-t a kezdő építőként megnyeri. Definiálható egy építő-romboló játék megfordítása is, nevezzük ezt *sumák-hajcsár* (Avoider-Enforcer) játéknak. Ebben a sumák nyer, ha elkerüli nyerő halmaz megszerzését, a hajcsár pedig akkor, ha rá tudja kényszeríteni ellenfelet egy nyerő halmaz elfoglalására.

A párosítások és a tábla egyéb felosztása hatékony módszer önmagában, vagy más eszközökkel kombinálva. További példák találhatóak erre a [8, 12, 14, 25, 54, 55, 62] számú írásokban.

Sávszélesség játék. [57, 58] Legyen egy n pontú G gráf sávszélessége $B(G)$, és a felek felváltva helyezték G pontjaira a $\{1, \dots, n\}$ számokat. Aki egy x pontot q -val számoz, úgy, hogy egy x -szel szomszédos pont y pont már számozott r -rel és $|q - r| \geq B(G)$, az veszít. Középpontos tükrözéssel a táblára és $\{1, \dots, n\}$ -re látható, hogy a $P_k \times P_k$ rácstra a kezdő pontosan akkor nyer, ha $k > 1$ és páratlan. Más gráfokra, mint pl. a T_k nem ismert, hogyan kell játszani, vagy az, hogy ki nyer.¹⁶

4.3. A véletlen módszer és a súlyfüggvények

A véletlen módszerek a matematika legtöbb ágában jelentős szerepet játszanak, a kombinatorikában és a játékelméletben pedig alapvetőt. Az inkább a meglepő, hogy viszonylag későn jelentek meg a pozíciós játékokban. Az áttörést Erdős Pál és John Selfridge 1973-as eredménye, lásd [27], hozta.¹⁷

13. Tétel (Erdős-Selfridge, 1973). *Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráf játék építő-romboló változatában az építő kezd, és $\sum_{A \in \mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$. Ekkor a romboló nyer.*

Bizonyítás: Legyen az építő i -edik lépése x_i , míg a rombolóé y_i , $X_i = \{x_1, \dots, x_i\}$, $Y_i = \{y_1, \dots, y_i\}$ és $A_i(I) = |A \cap X_i|$, illetve $A_i(II) = |A \cap Y_{i-1}|$.

¹⁵A nyeres eldöntése mind a normál, mind az építő-romboló változatban PSPACE-teljes feladat [63], ennek egyszerű bizonyítása található a [18] dolgozatban.

¹⁶Számos kombinatorikai tétel lehet efféle *elkerülhetetlenségi* játék alapja. A felsoroltak mellett a Ramsey, a van der Waerden és a Hales-Jewett tételek játék háttérét kutatták nagy erővel, [4, 11].

¹⁷John H. Conway híres békás problémája is *lehetett volna* volna a kezdet, [16]. Az ott használt súlyfüggvénynek viszont nincs közvetlen valószínűségi jelentése, talán emiatt maradt visszhangtalan.

Egy $A \in \mathcal{H}$ halmaz *súlya* az i -edik lépésben:

$$w_i(A) = \begin{cases} 2^{-|A|+A_i(I)} & \text{ha } A_i(II) = 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Egy $x \in V$ elem *súlya* $w_i(x) = \sum_{A \in \mathcal{H}} w_i(A)$, a *potenciál* pedig $w_i = \sum_{A \in \mathcal{H}} w_i(A)$.

A romboló az ún. *mohó algoritmust* követi, azt a $z \in V \setminus (X_i \cup Y_{i-1})$ elemet veszi az i -edik lépésben, amelyre a $w_i(z)$ érték maximális. Ez a $w_i \geq w_{i+1}$ egyenlőtlenséget adja minden i -re. Valóban, $w_{i+1} \leq w_i - w_i(y_i) + w_i(x_{i+1})$, hisz a romboló i -edik lépése $w_i(y_i)$ -vel csökkenti, míg az építő az $i + 1$ -edik lépése legfeljebb $w_i(x_{i+1})$ -el növelheti a potenciált, hisz pontosan azoknak az x_{i+1} -et tartalmazó halmazok súlyát duplázza meg, amelyeknek nem eleme y_i . A mohó algoritmus miatt $w_i(y_i) \geq w_i(x_{i+1})$, így adódik a potenciál monotonitása. Másrészt $w_1 \leq 2w_0$ mivel x_1 azon halmazok súlyát duplázza, amelyeknek eleme.

Ezért a 13. tétel feltétele miatt $w_1 \leq 2w_0 = \sum_{A \in E(\mathcal{H})} 2^{-|A|+1} < 1$. Tegyük fel, hogy az építő megnyeri a játékot, mondjuk a k -edik lépésben. Ez azt jelenti, hogy van olyan $A^* \in \mathcal{H}$, amelyre $|A^*| = A_k^*(I)$, így

$$1 > w_1 \geq w_k = \sum_{A \in E(\mathcal{H})} w_k(A) \geq w_k(A^*) = 2^{-|A^*|+A_k^*(I)} = 2^0 = 1.$$

Azaz a feltevésünk, hogy az építő nyer, ellentmondásra vezet. \square

Vegyük észre, hogy amíg a 11. tétel csak a *ritka*, de tetszőleges méretű, addig a 13. tétel a *sűrű*, de legfeljebb exponenciális méretű hipergráfokra adhat eredményt. A módszerek részben összevegyíthetők, lásd [8, 11, 12].

A 13. tétel vezet a *hatékony derandomizációkhoz* és a játékok mélyebb megértéséhez. Ez konkrétan éppen Erdős egy régi tételének bizonyításából tünteti el a véletlent, mely szerint ha egy $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfra a $\sum_{A \in \mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$, akkor $\chi(\mathcal{F}) \leq 2$. Vegyük észre, ha V pontjait egymástól függetlenül, $1/2 - 1/2$ valószínűséggel színezzük kékre vagy pirosra¹⁸, akkor az egyszínű halmazok várható száma $\mathbb{E} = \sum_{A \in \mathcal{H}} 2^{-|A|+1}$. Mivel $\mathbb{E} < 1$, lennie kell egy jó színezésnek, [1]. Ezért az összes $2^{|V|}$ darab kettő színezésből legalább egy jó.

Az \mathcal{F} paramétereiben polinom időben is adhatunk egy jó színezést: játszon mindkét játékos úgy, mintha romboló lenne. A $w_i(A)$ súly annak a feltételes valószínűsége, hogy A például kék lesz, ha az i -edik lépéstől pénzfeldobással színezzük. A játékok vizsgálatához is kapunk egy vezérfonalat, amely sokszor segít.

¹⁸Ez egy érme ismételt feldobásával elérhető. A példa mutatja, mekkora ereje van a véletlennek.

A véletlen heurisztika. Cseréljük ki a két tökéletesen játszó játékost két teljesen véletlenül játszóra. Nagyjából ugyanaz lesz a végeredmény.¹⁹

A valószínűségszámítási módszer és a pozíciós játékok elmélete közt szoros kapcsolat van. Lényegében minden módszernek az elsőből megvan a megfelelője a másodiktól. A 13. tétel, és főképpen a bizonyítási módszere, az ún. *első momentum módszer* derandomizálása. Így származtatható a (játékelméleti) második momentum módszer, Lovász lokális lemma stb, [1, 9, 12].

A 13. tétel éles, vannak olyan \mathcal{F} hipergráfok, melyre $\sum_{A \in \mathcal{H}} 2^{-|A|+1} = 1$, és az építő nyer. Legyen T_n egy n -szintes bináris fa, $V = V(T_n)$ és $A \in \mathcal{H}$, ha A a gyökér és egy levél közti út pontjaiból áll. (Az építő a gyökeret foglalja el, majd maradékból mindig annak a részfának a gyökerét, amelyiket elkerülte a romboló.) Egy másik példa: $V = \cup_{i=1}^{n-1} \{x_i, y_i\} \cup z$, $A \in \mathcal{H}$ ha $z \in A$ és $|A \cap \{x_i, y_i\}| > 0$ minden i -re. (Itt az építő z -t veszi először, majd ha a romboló egy $\{x_i, y_i\}$ pár egyik elemét választja, akkor ő a másikat.)

Beck József a [12]-ben vizsgálta a *kérdező-választó* (Picker-Chooser) és *választó-kérdező* (Chooser-Picker) játékokat. Itt a kérdező (Picker) kivesz két elemet, legyenek ezek $\{x_i, y_i\}$ az i -edik fordulóban, majd a választó (Chooser) dönthet, az egyiket a saját, a másikat a kérdező színére festi. Az első helyen álló játékos az építő, míg a másik a romboló szerepet kapja. A tapasztalat szerint a kérdező helyzete nem rosszabb, mintha egy építő-romboló játékot kellene játszania. Ezt a heurisztikát fejti ki Beck a [10]-ben, pontosabb formáját pedig szerzőtársaimmal a [24] dolgozatban adjuk meg:

14. Sejtés (Beck). *A kérdező nyeri a kérdező-választó (választó-kérdező) játékot az $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfon, ha építő (romboló), mint második játékos nyeri az építő-romboló játékot az \mathcal{F} hipergráfon.*

Egyelőre csak néhány játékra²⁰ bizonyított a 14. sejtés, lásd [10, 24], az általános eset nem ígérkezik könnyűnek. Jóval korábban, lásd [13], felvetette Beck József a kérdező-választó játékhoz hasonló, az ún. megbízó-festő játékot. Ebben a megbízó a kérdező, a festő pedig a választó. A megbízó nyer, ha lesz egyszínű halmaz, különben a monotóniát kerülő festő a nyerő. A [13] tartalmazza a 13. tételt megbízó-festő játékokra; a bizonyítás a szokásos súlyfüggvény módszer.

¹⁹Természetesen a véletlen heurisztika csak elv, sokszor érvényes, néha nem. De bármely játék esetén célszerű megnézni, hogy mit *jósol*. Véletlenül játszani viszont csak ritkán érdemes, lásd [15].

²⁰Ilyenek a később említett *Ramsey játékok*. Továbbá még a 18. tétel, a 8-amóba és a $HJ(4, 2)$ választó-kérdező változata. A 13. tétel választó-kérdező változatát egyelőre nem sikerült teljes erejében igazolni, bár ez a 14. sejtés egyik legérdekesebb speciális esete.

Az érdekesség kedvéért most bemutatunk egy véletlen módszert használó gondolatmenetet; hasonlótl Joel Spencer használt a *véglegesítés játék* (tenured game) elemzésében, [1, 64].

A 13. tétel megbízó-festő játékokra. A festő nyer, ha $\sum_{A \in \mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$.

Bizonyítás: Színezza a festő a kapott elemeket pénzfeldobással. Nézzük meg, milyen valószínűséggel lesz egyszínű egy $A \in E(\mathcal{H})$ halmaz. Ha egy $\{x_i, y_i\} \subset A$, akkor nem lehet egyszínű A . Ha $|\{x_i, y_i\} \cap A| \leq 1$ minden i -re, akkor ez a valószínűség $2^{-|A|+1}$.

Ezért az egyszínű halmazok várható száma $\mathbb{E} \leq \sum_{A \in \mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$ a megbízó bármely stratégiája esetén. Ha a megbízónak lenne nyerő stratégiája, akkor minden játék végén lenne egyszínű halmaz, azaz $\mathbb{E} \geq 1$. Mivel a játék nem lehet döntetlen, így a 6. tétel miatt a festőnek van nyerő stratégiája. \square

Elfogult játékok. Sűrű gráfokra is érdekessé tehető a Shannon-féle kapcsoló játék, ha a romboló nem egy, hanem több, mondjuk b élt vehet el egyszerre, [20]. Ha a K_n -en (n -pontú teljes gráf) játszunk, van egy b_0 *töréspont*, azzal, ha $b < b_0$, akkor az építő, ha $b > b_0$ akkor meg a romboló nyer.²¹ A fenti példában $b_0 \approx n/\log n$, vagyis az építő élei akkor kötik össze a pontokat, ha ennél jóval kisebb a b , és akkor nem, ha $b \gg b_0$. Az építő által megszerezhető részgráf más \mathcal{P} tulajdonságai is érdekesek: Hamilton kör vagy hosszú utak léte, [7, 9, 66], a legnagyobb komponens mérete, [15], az átmérő, [3] vagy a minimális fokszám, [9, 68].

Az egyik legfontosabb eszköz a 13. tétel általánosítása, Beck József, [5]. A (V, \mathcal{H}, a, b) hipergráf játék szabályaiban megegyezik a $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ játékkal, csak az egyik fél, (építő-romboló változatban az építő) a , a másik (romboló) pedig b elemet vehet fordulónként.

Erdős-Selfridge-Beck tétel. A (V, \mathcal{H}, a, b) hipergráf játék építő-romboló változatában ha $\sum_{A \in \mathcal{H}} (1+b)^{1-|A|/a} < 1$, akkor a romboló nyer.

Igazolni a korábbi súlyfüggvények kis módosításával lehet. Ez a tétel is éles, azaz a feltételben egyenlőséget írva már nem igaz.

Felmerül, honnan lehet megtippelni, mit várjunk egy-egy gráf játékban, azaz milyen a és b érték mellett érhet el az építő egy \mathcal{P} tulajdonságot? Itt újra a véletlen heurisztika játszik döntő szerepet, a véletlen gráfokra alapozva, [1].

A $G(n, p)$. A $G(n, p)$ valószínűségi mező úgy keletkezik, hogy az n pontú teljes gráf éleit egymástól teljesen függetlenül, p valószínűséggel hagyjuk meg.²²

²¹A b_0 pontos értékének kiszámítása többnyire reménytelen, általában csak becslések adhatók.

²²Sok más véletlen gráf modellt is használnak. A *perkoláció elméletben* rácsok éleit veszik p valószínűséggel, az ún. *kis-világ gráfok* leírására egy hatványtörvényt követő fokszám eloszlásúak közül húznak egyet egyenletes eloszlás szerint.

A $G(n, p)$ -re vonatkozó eredmények jó része arról szól, ha adott egy \mathcal{P} monoton gráftulajdonság²³ akkor milyen p_0 akkor egy $G \in G(n, p)$ milyen $f_{\mathcal{P}}(p)$ valószínűséggel \mathcal{P} tulajdonságú? Ha \mathcal{P} nem triviális, akkor $f_{\mathcal{P}}(0) = 0$, $f_{\mathcal{P}}(1) = 1$, és $f_{\mathcal{P}}(p)$ monoton növekvő p -ben. Sok esetben van egy olyan p_0 *küszöb*, ami körül ugrik fel $f_{\mathcal{P}}$ majdnem nulláról majdnem egyre, [1].

A véletlen gráf heurisztika. A \mathcal{P} monoton gráftulajdonság elérését célzó, a K_n élein folyó építő-romboló játék b_0 töréspontja ott van, ahol a megegyező élsűrűséget adó p_0 küszöb értéke \mathcal{P} -nek a $G(n, p)$ -ban. Pontosabban, $b_0 \approx a(1 - p_0)/p_0$, vagy $p_0 \approx a/(a + b_0)$, [5].

Ez a heurisztika oly eredményes, hogy az a különleges, ha nem ad jó eredményt. Erre példa az átmérő játék, lásd [3]. Itt egy rögzített $d \in \mathbb{N}$ -re az építő azt szeretné, ha a részgráfjának *átmérője*²⁴ nem haladná meg d -t. Jelöljük ezt $\mathcal{D}_d(a, b)$ -vel, ahol a és b , mint eddig. A véletlen gráf heurisztika szerint az építőnek nyernie kellene az $\mathcal{D}_2(1, 1)$ játékot, hisz egy véletlen $G \in G(n, 1/2)$ gráfra nagy valószínűséggel $\text{diam}(G) = 2$. Ez nincs így, a romboló nyeri a $\mathcal{D}_2(1, 1)$ játékot, ha $n \geq 4$. (A romboló vesz egy xy élt, majd párosítást játszik: az építő egy xz lépésére yz -vel, az yz -re pedig xz -vel felel.) Ugyanakkor, ha az építő két élt vehet lépésként, akkor majdnem helyreáll a rend; az építő nyeri a $\mathcal{D}_2(2, b)$ játékot, ha $b \leq 0.25n^{1/7}/(\ln n)^{3/7}$ és n elég nagy, lásd [3].

Magukon a véletlen gráfokon is értelmezhetők pozíciós játékok, itt követjük Miloš Stojaković és Szabó Tibor leírását a [66]-ból. Adott egy (V, \mathcal{H}, a, b) hipergráf játék. A $(V_p, \mathcal{H}_p, a, b)$ *véletlen játék* olyan játékok valószínűségi mezője, melyekre minden $x \in V$ egymástól függetlenül, p valószínűséggel kerül V_p -be, és az $\mathcal{H}_p = \{W \in \mathcal{H} : W \subset V_p\}$. Ha például $V = E(K_n)$ és \mathcal{H} a K_n gráf feszítőfái, akkor feltehető a kérdés, milyen p értékekre nyer az építő (romboló) nagy valószínűséggel a $(V_p, \mathcal{H}_p, a, b)$ véletlen játékban? Mint a véletlen gráf heurisztika alapján ez várható, lesz egy b^p töréspont, továbbá $b^p = \Theta(pn/\log n)$, feltéve hogy $p \geq c \log n/n$, valamely $c > 0$ -ra, [66].

Egy pozíciós játékban a *lépés joga* is függhet a véletlentől. Yuval Peres és társai a [52]-ben egy olyan hexet vizsgálnak, ahol minden fordulóban érmedobással döntenek el, hogy melyik fél léphet. Többféle alakú tábla definiálható, de a véletlen heurisztika hibátlanul jósol: ugyanakkora valószínűséggel nyer az egyik, mondjuk a fehér, a tökéletesen, mint a véletlenül játszó ellenfelek esetén. Meglepő módon az $n \times n$ véletlen hex bármely állásában az optimális stratégia polinom időben kiszámítható és a választható mező mindkét félre ugyanaz. A játék szoros kapcsolatban van a hatszögrács

²³A \mathcal{P} attól monoton, ha egy G rendelkezik vele, akkor új élek véve G -hez megmarad \mathcal{P} . Monoton pl. az összefüggőség, Hamilton kör léte, de nem ilyen Euler köré.

²⁴Egy G gráf átmérője, $\text{diam}(G) = \max_{x, y \in V(G)} d(x, y)$, ahol $d(x, y)$ az x és y pontok közti legrövidebb út hossza.

perkoláció elméletével és, határátmenetben, a konform leképezésekkel.

Általában is beszélhetünk egy (V, \mathcal{H}) játék véletlen változatáról; erre kiterjeszthető a 13. tétel.

Erdős-Selfridge véletlen játékra. Ha a (V, \mathcal{H}) hipergráf játék véletlen változatára $\sum_{A \in \mathcal{H}} 2^{-|A|} < 1$, akkor azt legalább $1/2$ valószínűséggel nyeri a romboló.

Bizonyítás: Játsszon a romboló úgy, mint a 13. tételben. Ekkor $\mathbb{E}[w_{i+1}] \leq \mathbb{E}[w_i] < 1$ minden i -re, és ebből a Markov egyenlőtlenség adja az állítást. \square

A második momentum módszer. Egy $G \in G(n, 1/2)$ -ben a legnagyobb klikk mérete, $\omega(G)$ a legtöbb n -re nagy valószínűséggel egy k_n értékre koncentrálódik,²⁵ [1]. Ez a k_n , pontosabban a $q_n = k_n - 2 = 2 \log_2 n - 2 \log_2 \log_2 n + 2 \log_2 e - 3$ szám döntő szerepet játszik a *Ramsey játékokban*. Itt a felek a K_n éleit veszik, és a cél (vagy éppen elkerülendő dolog) egy K_q részgráf összes élének megszerzése. Beck József belátta a [10]-ben, hogy q_n a Ramsey játékok töréspont nagy n -ekre. Pontosabban ha q_n nincs nagyon közel egy egészhez, akkor $q \leq \lfloor q_n \rfloor$ -ra lesz egyszínű K_q , míg ha $q \geq \lceil q_n \rceil$, akkor ez elkerülhető.²⁶ A véletlen heurisztika megint jól működik, hisz a q_n nemcsak az építő-romboló, sumák-hajcsár, de a kérdező-választó játékokra is érvényes. Szintén a derandomizáció az ötlet a fokszám játékban, [3, 9, 68], itt az építő célja a K_n éleiből minden pontnál legalább $n/2 - k$ élt megszerezni. Ha $k \geq \sqrt{n \log n}$, akkor az építő, ha $k \leq \sqrt{n}/24$, akkor a romboló nyer. Hasonló igaz kérdező-választó, vagy megbízó-festő játékokra; az utóbbi alsó korlátja különösen egyszerű.

A megbízó-festő fokszám játék. Itt a festő akkor nyer, ha az lesz olyan x , melynél a megbízó és festő által vett élek különbsége $\geq k$, ahol k előre adott. Ha $k^2 = \binom{n}{2} = m$, akkor a festő nyer.

Bizonyítás: (Beck ötlete alapján, lásd [9].) Az \mathcal{H} a gráf egy-egy pontjára illeszkedő élek halmazai. Egy $A \in \mathcal{H}$ -ra jelölje $A_i(F)$ ill. $A_i(M)$ a festő ill. a megbízó által az i -edik forduló végéig elfoglalt elemeinek a számát. Továbbá az A súlya $w_i(A) = A_i(F) - A_i(M)$ és $w_i = \sum_{A \in \mathcal{H}} w_i^2(A)$. A $w_i^2(A)$ változása (ha pont egy élet színezzük) $w_{i+1}^2 = w_i^2(A) \pm 2w_i(A) + 1$, ezért a festő *mindig* elérheti, hogy $w_i + 2 \leq w_{i+1}$. A játék végén a $w_{m/2} \geq m$, ezért lesz olyan A^* , melyre $w_{m/2}^2(A^*) \geq m$, vagy $w_{m/2}(A^*) \geq \sqrt{m} = k$. Ekkor viszont az egyik játékosnak k -val több éle van az A^* -nak megfelelő pontnál, mint a másiknak. \square

Ritka hipergráfok. Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfban minden $A \in \mathcal{H}$ -ra az $|A| \geq n$ és A legfeljebb d másikkal éllel metsződik. Ekkor az ún. Lovász-féle lokális lemmából következik, ha $d \leq 2^{n-3}$, akkor $\chi(\mathcal{F}) \leq 2$, lásd [1, 26]. Sokáig nem

²⁵A koncentráció bizonyításának eszköze a második momentum módszer.

²⁶Vegyük észre, hogy ez lényegében teljesen pontos eredmény!

volt azonban világos, hogyan találhatjuk meg gyorsan (polinom időben) az \mathcal{F} egy jó színezését. Kicsivel erősebb feltételek mellett Beck József leírt egy ilyen algoritmust a [8]-ban. Ezek alapján azt várnánk, ha d nem túl nagy (például $d \leq 2^{n/2}$), akkor az építő-romboló játékot a romboló nyeri a \mathcal{H} -n.

Általában ez a kérdés teljesen nyitott, de az ún. *majdnem diszjunkt* hipergráfok esetében többet tudunk. A $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráf majdnem diszjunkt, ha $A \neq B \Rightarrow |A \cap B| \leq 1$, minden $A, B \in \mathcal{H}$ -ra. Ez teljesül a $HJ(n, d)$ játékokra; ekkor megmutatható, léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok, hogy a romboló nyer, ha $d < c_1 n^2 / \log n$, míg az építő nyer, ha $d > c_2 n^2$, lásd [11, 12]. Ha $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ majdnem diszjunkt és $|A| \leq 3$ minden $A \in \mathcal{H}$, akkor polinom időben eldönthető az építő-romboló játék, lásd [42].

Újrafelhasznált játékok. A malomhoz (Nine Men's Morris) hasonló pozíciós játékok az alábbiak. Adott egy \mathcal{H} hipergráf és egy n paraméter. Az első n lépésben a szokásos módon játszanak a felek, majd utána a már lerakott (saját) jeleket lehet áthelyezni. Ha egy építő-romboló \mathcal{F} játékban a rombolónak van nyerő párosítási stratégiája, akkor ez használható az \mathcal{RF} újrafelhasznált változatban is.²⁷ Nyitott kérdés viszont, hogy általánosítható-e a 13. tétel? Néhány, *Kaplansky típusú* újrafelhasznált játékokra vannak nem triviális eredmények.

Kaplansky eredeti problémájában az \mathbb{R}^2 pontjait vehetik felváltva a játékosok, $k \in \mathbb{N}$ rögzített. Az nyer, akinek először k pontja egy olyan ℓ egyenesen, amin az ellenfelének nincsen pontja. (Az építő-romboló változatban építő akkor nyer, ha lesz olyan ℓ egyenes, amelyen neki k pontja van, míg a rombolónak egy sem.) A [6]-ban, többek közt szerepel olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok léte, hogy az n lépésig tartó játékot a romboló nyeri, ha $k > c_1 \log n$, és az építő nyeri, ha $k < c_2 \log n$. Az építő nyérése az \mathbb{R}^2 egy alkalmasan választott véges S halmazán és az alábbi tételre alapul. Itt $\Delta_2(\mathcal{F}) = \max_{x, y \in V} |\{A : x, y \in A \in \mathcal{H}\}|$.

Tétel. [Beck, [6]] Az építő kezdőként megnyeri a (\mathcal{H}, p, q) építő-romboló játékot, ha

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} \left(\frac{p+q}{p} \right)^{-|A|} \geq p^2 q^2 (p+q)^{-3} \Delta_2(\mathcal{H}) |V|.$$

Ha csak a vízszintes, függőleges és ± 1 meredekségű egyeneseken játszunk, és $p = 2$, $q = 1$ akkor vannak olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok, hogy az újrafelhasznált Kaplansky játékot a romboló nyeri ha $k > c_1 \log n$, míg az építő nyer, ha $k < c_2 \log n$, lásd [56].

²⁷Az \mathcal{Rk} -amőbát a romboló nyeri, ha $k \geq 9$. A $k = 8$ -ra már nem világos a helyzet.

Ugyanitt található, hogy az általános esetben (azaz az \mathbb{R}^2 összes egyenesét tekintve) a romboló nyer, ha $k > 2n^{1/3}$.

Az utóbbi eredmény Szemerédi Endre és William Trotter egy klasszikus kombinatorikus geometriai tételén múlik.²⁸ Egy *illeszkedés* egy (p, L) pár, ahol $p \in \mathbb{R}^2$, L egy egyenes és $p \in L$.

Szemerédi-Trotter tétel. Vegyünk n pontot és m egyenest a síkon, és legyen I az illeszkedések száma. Ekkor $I \leq c(n + m + (nm)^{2/3})$, ahol c egy abszolút konstans.

Így ha m azon egyenesek száma, amelyek mindegyike legalább k pontját tartalmazza egy n -pontú halmaznak, akkor $m \leq c_2 n^2 / k^3$, ha $k \leq \sqrt{n}$, ahol c_2 konstans. Ez garantálja, hogy a rombolónak mindig lesz egy olyan pontja, amelynek elmozdítása nem befolyásol egy megfelelő súlyfüggvényt, [56].

Alakzatok a síkon. Szintén a Kaplansky játék motiválta az alábbi típusú problémákat, lásd [14]. Adott egy k pontból álló D alakzat a síkon, és az építő akkor nyer, ha megszerzi az összes pontját valamely $\phi(D)$ -nek, ahol ϕ az \mathbb{R}^2 mozgáscsoportjának egy eleme.

Tétel. [Beck, [14]] Az építő nyeri az alakzat játékot a síkon minden véges D esetén.

Beck ötletes konstrukcióval egyfajta véges rácsot készít a D elforgatott, eltolt példányaiból, majd a fent említett, [6]-beli tételt alkalmazza.²⁹

4.4. Gráfjátékok

4.4.1. Földrajzi játék

A normál földrajzi játékban³⁰ olyan földrajzi fogalmakat mondanak felváltva a játékosok, amelyek az előző szó utolsó betűjével kezdődnek. Kétszer nem használható egy szó, és aki nem tudja folytatni, az veszít. Ennek kézenfekvő absztrakt változatában egy G irányított gráf pontjain lépegetünk felváltva, adott v_0 pontból indulva, az élek mentén. Egy pont csak egyszer látogatható, és aki nem tud lépni, az veszít. Az általános eset nagyon nehéz, ennek belátásához definiáljunk egy másik problémát, amely játékként fogalmazható meg. Adott egy ϕ konjunktív normál alakú Boole formula az x_1, \dots, x_n változókkal. Két játékos, A és B , felváltva ad értékeket a változóknak, az i -edik lépésben x_i -nek. Ha ϕ igaz értéket vesz fel, akkor A nyer, különben B . Feltehető, hogy A teszi meg az utolsó lépést; ha nem így lenne, vegyük

²⁸Ennek egy nagyon szép, a véletlen módszert használó bizonyítását adta Székely László, lásd [1].

²⁹A játék *hossza* ezzel a stratégiával óriási már akkor is, ha D egy szabályos ötszög csúcshalmaza.

³⁰Nálunk inkább az „ország, város, fiú, lány” néven ismert.

fel az x_{n+1} változót, ami nem is szerepel ϕ -ben. Formálisan, igazságértékét szeretnénk tudni ennek a kifejezésnek:

$$\Phi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots \exists x_\ell \forall x_{\ell+1} \dots \forall x_{n-1} \exists x_n \phi.$$

Legyen QSAT azon Φ kifejezések nyelve, amelyek igazak. Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi tételt, további részletek Papadimitriou könyvében [?] találhatóak.

15. Tétel. *A QSAT nyelv eldöntési problémája PSPACE-teljes.*

A 15. tétel felhasználásával könnyű belátni, hogy a földrajzi játék hasonlóan nehéz. Legyen GEOGRAPHY azon gráfok nyelve, amelyekben az első játékos megnyeri a földrajzi játékot.

16. Tétel. *A GEOGRAPHY nyelv eldöntési problémája PSPACE-teljes.*

Bizonyítás: A szokásos visszavezetési technikát használjuk, egy Φ kifejezéshez hozzárendelünk egy $G(\Phi)$ gráfot úgy, hogy Φ pontosan akkor igaz, ha az első játékos nyeri a földrajzi játékot a $G(\Phi)$ gráfon. Először minden x_i változóhoz, $1 \leq i \leq n$, egy G_i gráfot rendelünk, ahol

$$V(G_i) = \{a_i, b_i, c_i, x_i, \bar{x}_i\}, \quad E(G_i) = \{(a_i, b_i), (b_i, x_i)(b_i, \bar{x}_i), (x_i, c_i), (\bar{x}_i, c_i)\}.$$

Azonosítjuk az a_i és c_{i-1} pontokat, $2 \leq i \leq n$. Ha $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_\ell$, akkor felvesszünk további v_j pontokat és a (c_n, v_j) éleket, ahol $1 \leq j \leq \ell$. Végül ha a ϕ_j tartalmazza az y literált ($y = x_i$ vagy $y = \bar{x}_i$), akkor (v_i, y) élt is behúzzuk.

A játék az a_1 pontban kezdődik, a játékosok végigmennek a G_i gráfokon és a második játékos léphet c_n -ből valamelyik v_j -be. Ha G_i -ben az x_i pontot választotta a soron lévő játékos, akkor a Φ kiértékelésben $x_i = 0$, míg ha az \bar{x}_i pontot, akkor $x_i = 1$. A második játékos a v_j pont választásával tesztelheti a fenti kiértékelést, rámutatva arra a ϕ_j részformulára, amelyik nem teljesül. Végül ha ϕ_j értéke pontosan akkor egy, ha ϕ_j -ben egy y literál egy értéket kapott; ekkor viszont az első játékosnak van még egy lépése a (v_j, \bar{y}) élen. Másrészt GEOGRAPHY \in PSPACE, hisz a lehetséges játszmák száma kevesebb, mint n^n , így a leírásához elég $O(n \log^2 n)$ tár. \square

4.4.2. Általánosított Slither

A földrajzi játék egy változata az ún. *általánosított Slither*. Itt az első játékos kezdőlépése a G egy v_0 pontjának a kiválasztása, majd a második folytatja a játékot v_0 -ból. Ennek a játéknak a speciális esetei is érdekesek, lásd [47] 8. fejezet 8. és 9. probléma.

17. Tétel. (i) Tegyük fel, hogy G körmentes. Mutassuk meg, hogy az első játékos nyer, és határozzuk meg a pontokat, melyekkel kezdve nyerhet. (ii) Tegyük fel, hogy van olyan $v_0 \in V(G)$, melyre $d_-(v_0) = 0$, azaz v_0 -ba nem fut él. Lássuk be, hogy első játékosnak van nyerő stratégiája. (iii) Egy tetszőleges G irányított gráfra második játékos nyer akkor és csak akkor, ha G minden erősen összefüggő komponensében játszva is nyerne. (iv) Egy szimmetrikus G gráf³¹ esetén az első játékos pontosan akkor nyer, ha a G gráfban nincs teljes párosítás.

Bizonyítás: (i) Mivel G irányított kör mentes, vannak benne nulla kifokú pontok. Ezek X halmaza vesztő, majd visszafele címkézéssel azon pontok, ahonnan X -be vezet él nyerők és így tovább, lásd a 6. tétel bizonyítását.

(ii) Stratégia lopást használhatunk. Tegyük fel, hogy a második játékos nyer. Mivel v_0 minden y szomszédjában kezdve veszítene az első játékos, kezdjen x_0 -ban, és megjátszhatja amit a második játékos nyerő stratégiája javasol, hiszen v_0 -at egyik y pontból induló játék sem érintheti. Mivel a második játékos nyerése ellentmondáshoz vezet és döntetlen nem lehet, az első játékos nyer.

(iii) Használjuk a tényt, hogy G ponthalmaza felbomlik erősen összefüggő komponensek uniójára és a C_i, C_j ($i \neq j$) komponensek között az élek egyirányban húzódnak.³² Egy komponensben vesztés vagy az egész játszma vesztését jelenti, vagy kényszerít egy másik komponensbe elsőként történő belépésre. A 17. tétel (i) pontjának igazoláshoz hasonlóan, ha van olyan komponens, ahonnan játszva az első játékos nyer, akkor vegye a $C(G)$ -ben egy levélhez legközelebb eső ilyen C_i komponens. Játssza ezen a C_i -hez tartozó nyerő stratégiát. A második játékos vagy veszít a C_i -ben, vagy átlép egy olyan C_j komponensbe, ahol már az második játékosnak van nyerő stratégiája; ezt viszont az első játékos ellopja tőle. Ha bármely C_i komponensben nyer a második játékos, akkor persze nyer G -ben, mindig az aktuális C_i -beli nyerő stratégiát követve..

(iv) Ha van egy M teljes párosítás, akkor az első játékos x lépésére a második játékos mindig y -al felel, ahol $(x, y) \in M$. Ha nincs teljes párosítás, jelöljön M^* egy maximális párosítást, és az első játékos első lépése legyen egy olyan x_0 , melyet elkerül a párosítás. Ezek után ha a második játékos egy x_i pontra lép, az első játékos átlép x_{i+1} -re, ami x_i M^* párja. Tegyük fel, hogy az első játékos nem tud lépni az x_{2k+1} pontból. Ekkor az $(x_0, x_1), (x_2, x_3), \dots, (x_{2k-1}, x_{2k})$ élek mindegyik eleme $E(G) \setminus M^*$ halmaznak, míg $(x_1, x_2), \dots, (x_{2k}, x_{2k+1}) \in M^*$, azaz a $P = \{x_0, \dots, x_{2k+1}\}$ alternáló

³¹ G szimmetrikus, ha az $(x, y) \in E(G) \Rightarrow (y, x) \in E(G)$.

³²Az erősen összefüggő komponenseket egy pontra és a köztük húzódó éleket egy élre összehúzáva keletkezik a *kondenzált gráf*, $C(G)$. Ez nem tartalmaz irányított kört.

út. Ez ellentmond M^* maximalitásának, hisz az M^* és P élhalmazának szimmetrikus differenciája $|M^*| + 1$ elemű párosítás. \square

4.4.3. Shannon kapcsoló játék

Shannon-féle kapcsoló játék. Ez a játék a hex, az y-játék és a David Gale által kigondolt *Brigit* mintájára készült, [16]. Ezekben az összekötős játékokban pontosan az egyik fél nyer, kézenfekvő hát, hogy építő-romboló formában beszéljünk róluk. Ha adott egy G gráf, akkor egy-egy élt³³ választva fordulónként az építő G egy *feszítőfáját* akarja megszerezni, míg a romboló célja az, hogy az építő éleiből álló részgráf ne legyen összefüggő.

18. Tétel. [44] *Tegyük fel, hogy a romboló kezdi a Shannon-féle kapcsoló játékot. Egy adott n -pontú G gráfra építő pontosan akkor nyer, ha G -ben van két diszjunkt feszítőfa, F_1 és F_2 .*

Bizonyítás: \Leftarrow : A játék i -edik menetében F_1^i és F_2^i fákról beszélünk majd a G_i gráfban. ($G_1 = G$, $F_1^1 = F_1$ és $F_2^1 = F_2$.) Ha a romboló az i -edik lépésben nem az $E(F_1^i) \cup E(F_2^i)$ -ből választ, akkor az építő bármit léphet. Ha mondjuk F_1^i -ből vesz egy e_i élt romboló, akkor az $E(F_1^i) \setminus \{e_i\}$ élek által feszített részgráf pontosan két, C_1^i és C_2^i , komponensből áll. Az építő ekkor egy olyan $f_i \in F_2^i$ élt választ, mely a C_1^i -t összeköti C_2^i -vel. (A fák alapvető tulajdonságai a [47]-ből felidézhetők.) Mivel az f_i él két végpontja, x_i és y_i többé nem szakad el egymástól, *húzzuk össze* az f_i élt.³⁴ Könnyen látható, ha F_1^i és F_2^i diszjunkt feszítőfái a G_i -nek, akkor az $F_1^{i+1} = F_1^i/f_i$ és $F_2^{i+1} = F_2^i/f_i$ szintén diszjunkt feszítőfák G_{i+1} -ben. Továbbá $|V(G_i)| - 1 = |V(G_{i+1})|$, ezért $|V(G_{n-1})| = 1$, és az $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$ élek G egy feszítőfáját alkotják.

\Rightarrow : Tegyük fel, hogy az építő nyer és lopja el ezt a stratégiát a romboló. A játék végére a romboló megszerzi az F_r , az építő pedig az F_m feszítőfa éleit, amelyek G -ben vannak és diszjunktak. \square

Megjegyzés. A fenti érvelést eredetileg nem gráfokra, hanem *matroidokat* adták. A matroidoknak sok egyenértékű jellemzése van, nekünk most a *bázis* fogalma a legkényelmesebb. A véges V halmaz feletti \mathcal{B} halmazrendszert egy *matroid bázisainak* nevezzük, ha

³³A hex és az y-játék szintén alapozható egy-egy gráfra, de ott nem az éleket, hanem a pontokat szerzik meg a játékosok. Ez a látszólag kis eltérés egy teljesen más világba visz; itt képesek vagyunk a nyerő stratégiák leírására.

³⁴Az új gráfban, G_{i+1} -ben x_i és y_i helyett egy új, z_i pontot veszünk fel, melyet x_i és y_i összes szomszédjával kötünk össze, jelben $G_{i+1} = G_i/f_i$.

1. \mathcal{B} nem-üres,
 2. $\forall A, B \in \mathcal{B}, \forall x \in A \setminus B$ esetén $\exists y \in B \setminus A$, hogy $\{A \setminus \{x\}\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.
- Ezzel a 18. tétel általánosabb formában így szól: Ha az építő-romboló (V, \mathcal{B}) pozíciós játékban a romboló kezd, akkor az építő pontosan akkor nyer, ha léteznek $A, B \in \mathcal{B}$ halmazok úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$. Az élek törlése és kontrakciója természetes matroid műveletek, a 2. axióma mintha a fenti bizonyításra lenne szabva.³⁵ A 18. tétel olyan helyzetekben is működik, amikor párosítási stratégia biztosan nem létezik. Vegyük a teljes gráfot az $\{x, y, v, w\}$ pontokon, és a q, z pontokat úgy, hogy q szomszédos x -szel és y -nal, z pedig v -vel és w -vel.

4.4.4. Zsaru-Rabló

A játékot egymástól függetlenül Quilliot [59] és Nowakowski és Wikler [50] találta ki illetve írta le. A két játékos egy G gráf egy-egy csúcsát foglalja el, majd felváltva szomszédos pontra lépnek, vagy helyben maradnak. Ha a zsaru és a rabló egyidőben azonos pontban vannak, akkor a zsaru nyer; ha a rabló ezt teszőlegesen sokáig el tudja kerülni, akkor ő nyer. Ha G véges, akkor a 6. tétel miatt valamelyik félnek van nyerő stratégiája.

Esetünkben $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, amelynek minden pontjában van egy hurokél.³⁶

Jelölések: $N(v)$ az $v \in V(G)$ szomszédai, $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Ha adott a pontok egy v_1, \dots, v_n sorrendje, akkor a $N_i(v) = N(v) \cap \{v_j : i \leq j \leq n\}$.

Ha nincs hurokél, a zsaru kétféleképpen nyerhet. Vagy a saját lépésével fogja el a rablót, vagy a rabló szalad a karjaiba. Ha minden pontban van hurokél és a rabló kerüli a veszteséget, akkor csak az elő eset következhet be, azaz a zsaru lépésével valósul meg a nyeres.

A stratégiák egyszerű függvények, $s : V(G) \times V(G) \rightarrow V(G)$ formában, ahol az (u, v) pár a zsaru és a rabló pillanatnyi helyzete, az $s(u, v) \in N(u)$ pedig a zsaru következő lépése. A gráf zsaru nyerő, ha van olyan s , amely a rabló bármely stratégiája mellett nyer. Feltesszük, hogy G összefüggő, és a rabló amennyire csak képes, késleltetni igyekszik a vesztesét.

³⁵A látszat csal, hiszen a matroidokat már Hassler Whitney [70] vizsgálta az 1930-as években. Lehman tétele jelentősen növelte a matroidok elfogadottságát. Ezt megelőzően pl. William Tutte néhány matroidokra vonatkozó klasszikus eredményét inkább gráfokra mondta ki, [41]. Azóta viszont a matroidok a kombinatorika, a kombinatorikus optimalizálás és a véges geometria fontos részévé váltak.

³⁶Irányított gráfokra a probléma nagyon nehéz, ún. EXPTIME-teljes, [34].

19. Tétel. Legyen G véges, irányítatlan gráf, amelynek minden pontjában van hurokél. G zsaru nyerő akkor és csak akkor, ha a pontjainak van olyan v_1, \dots, v_n rendezése, melyre minden i -re, $1 \leq i \leq n$ van olyan j , $i < j \leq n$, hogy $N_i[v_i] \subseteq N_j[v_j]$.

Bizonyítás: Először egy algebrai és egy topológia fogalmat célszerű definiálni. A $h : G \rightarrow H$ leképezés *homomorfizmus* a G gráfból a H gráfba, ha minden $(u, v) \in E(G)$ esetén $(h(u), h(v)) \in E(H)$ teljesül. Egy ρ homomorfizmust, amely G -t egy H részgrádjára képi úgy, hogy a $\rho(v) = v$ minden $v \in H$ esetén pedig *összehúzás* (retrakció) H -ra. Vegyük észre, hogy az összehúzás azért nem triviális, mert vannak hurokélek.

20. Lemma. Ha G zsaru nyerő és H a G egy összehúzása, akkor H is zsaru nyerő.

Bizonyítás: Legyen s a zsaru egy nyerő stratégiája a G gráfon és ρ egy összehúzás. Ezzel megadhatunk egy $s' : V(G) \times V(H) \rightarrow V(H)$ nyerő stratégiát a H gráfon: legyen $s'(u, v) = \rho(s(u, v))$. Ha az s sohasem küldi ki a zsarut H -ból, akkor s' nyerő, hisz egyszerű megszorítása s -nek H -ra, és s a rabló minden stratégiájára nyer; speciálisan arra is, ha az nem hajlandó H -t elhagyni. Ha $s(u, v) \in V(G) \setminus V(H)$ valamely $u, v \in V(H)$ -ra, akkor $N[s(u, v)] \subseteq N[\rho(s(u, v))]$, hisz ρ homomorfizmus. Ez viszont azt jelenti, hogy a $\rho(s(u, v))$ legalább olyan hatékony, mint a $s(u, v)$, hisz ha az utóbbi elől nem tud elmenekülni a rabló, akkor az előbbi is elfogja.³⁷ \square

Tegyük fel, hogy a zsaru nyer; ez kétféleképpen lehetséges. Ha van olyan $v \in V(G)$, amely minden másik ponttal össze van kötve, akkor a zsaru ezt megjátszva nyer és a tétel feltétel is teljesül, ha $v_n = v$ -t választunk amúgy tetszőleges sorrend mellett. Ha nincs ilyen v , akkor legyen a rabló vesztes előtti utolsó lépése v . Ekkor a zsaru egy olyan u pontban áll, amelyre $N[v] \subseteq N[u]$, hisz különben nem érne véget a zsaru következő lépésével a játék. A $G - v$ összehúzása a G -nek ($\rho(v) = u$), így a lemma miatt zsaru nyerő, azaz használhatunk egy indukciót rajta. A $G - v$ pontjai tehát a megfelelő sorrendbe állíthatók, ennek az elejére téve v megkapjuk a kívánt sorrendet.

A másik irány szintén indukcióval kapható meg. Ha adott egy, a tétel feltételeit teljesítő v_1, \dots, v_n sorrend, akkor húzzuk be v_1 -et. Azaz vegyük az ρ összehúzást, amelyre $\rho(v_i) = v_i$, ha $i > 1$ és $\rho(v_1) = v_j$, ahol $N[v_1] \subseteq N[v_j]$. A $G - v_1$ v_2, \dots, v_n sorrendje és az indukciós feltétel miatt zsaru nyerő, így van egy s nyerő stratégiája. Ezt kiterjeszthetjük egy s' , a G -n értelmezett nyerő stratégiára, $s'(u, v) = s(u, v)$, ha $v \neq v_1$ és $s'(u, v_1) = s(u, \rho(v_1))$, kivéve, ha van közvetlen nyerő lépése a zsarunak. \square

³⁷A lemma megfordítása nem igaz, például a kettő hosszú út, P_2 összehúzása a négy hosszú körnek, de az utóbbi nem zsaru nyerő.

4.4.5. Bonyolultság

II. rész

Neumann, Nash és követőik

5. fejezet

Mátrix játékok

Az anyagiasabb XX. században a közgazdaságtudomány igénye szintén életre hívott néhány modellt. Elsőként az ún. *teljes információs, véges, kétszemélyes, zérusösszegű* játékokat vizsgáljuk részletesen. Ebben az esetben a játékosok *stratégiái* felsorolhatók és egy (i, j) párhoz hozzárendelhető az a_{ij} szám, amit a sorjátékos nyer, az oszlopjátékos pedig veszít, ha rendre az i -edik, illetve a j -edik stratégiájukat játsszák. Így a tömörség kedvéért hívhatjuk ezeket a játékokat *mátrix játéknak*.

A mátrix játékok leírásának első lépéseit Emile Borel tette meg 1921 és 1927 között. Jelentős haladást ért el Neumann János: 1928-ban bebizonyította az azóta híressé vált *minimax* tételét és ezzel megmutatta *hol* kell keresni a megoldásokat. Körülbelül 20 évvel később ő adott választ a *hogyan* kérdésre is, rámutatva a mátrix játékok és a lineáris programozás kapcsolatára. Később Dantzig, Gale, Kuhn és Tucker munkája nyomán a mátrix játékok elmélete teljesen beleépült a lineáris programozás elméletébe. Ezt a felépítést követjük mi is.

1. Definíció. Minden A valós mátrix definiál egy játékot, ahol a **sorjátékos** az egyik sort, az **oszlopjátékos** az egyik oszlopot választja minden fordulóban, és a **sorjátékos nyereménye** a választott sor és oszlop találkozásában levő a_{ij} elem. Az A mátrixot **kifizetési mátrixnak**, sorait/oszlopait pedig a sor/oszlop játékos **tiszta stratégiáinak** nevezzük.

Példa: Legyen az A mátrix az alábbi.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A sorjátékos, bár a lehető legtöbbet szeretne nyerni, itt biztonsági játékban gondolkodhat. Az első sort játszva legalább -1 -et nyer (legfeljebb 1 -et veszít), ha a második vagy harmadik sort, akkor pedig rendre 1 illetve 0 lesz a minimális nyereménye. Az oszlopjátékos hasonlóan korlátozhatja a sor nyereményét és ezzel a saját veszteségét; ez nem több, mint 3 , 2 , 1 és 3 , ha az oszlop az első, második, harmadik vagy negyedik oszlopot játsza. Ezeket a garantált alsó (felső) korlátokat a sorok (oszlopok) elé (fölé) írtuk.

	3	2	1	3
-1	0	-1	0	3
1	3	2	1	2
0	1	3	0	1

Ha a sorjátékos a második sort választja, az oszlopjátékos pedig a harmadik oszlopot, akkor garantált, hogy a sor legalább 1 -et nyer, de az is, hogy többet nem. Azaz ezek megjátszását optimális stratégiáknak tekinthetjük.

5.0.6. A nyeregpon

A példa gondolatmenete elég nyilvánvalóan általánosítható.

2. Definíció. Jelentse m_i az i -edik sor minimumát, M_j pedig a j -edik oszlop maximumát, azaz $m_i = \min_j a_{ij}$, $M_j = \max_i a_{ij}$. Legyen továbbá $m = \max_i \min_j a_{ij}$ és $M = \min_j \max_i a_{ij}$.

Könnyen beláthatók az alábbiak:

- (i) $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$, azaz $m \leq M$
- (ii) Ha $m = M$, akkor van olyan r és s , hogy $a_{rs} = m = M$.

3. Definíció. Ha $m = M$, akkor az $a_{rs} = m$ elem az A mátrix **nyeregpon**tja.

21. Tétel. Ha az A mátrixnak van egy a_{rs} nyeregpontja, akkor az r -edik sor választása a sorjátékos számára, illetve az s -edik oszlop választása az oszlopjátékos számára egy optimális stratégia párt alkot.

Bizonyítás: A sorjátékos nyereménye az i -edik sort választva legalább m_i , az oszlopjátékos vesztesége a j -edik oszlopot választva legalább M_j . Az r -edik sort, illetve az s -edik oszlopot választva a sorjátékos $m = a_{rs}$ nyereményt garantálhat magának, míg az oszlopjátékos legfeljebb $M = a_{rs}$ egységnyit veszít. \square

5.0.7. Moriarty paradoxon

A szituációt Sir Arthur Conan Doyle írta le a *The Final Problem* című könyvében. Később Oskar Morgenstern és, vélhetően az ő hatására, Neumann János is foglalkozott a problémával.

A regény szerint Sherlock Holmes Moriarty professzor elől menekülve Londonban felszáll a Doverbe tartó vonatra, hogy onnan továbbhajózva majd a kontinensen legyen menedéket. A felszállásnál viszont észrevette, hogy Moriarty is felszállt, és jó oka van azt hinni, Moriarty is láthatta őt. Ha együtt szállnak le a vonatról, az végzetes Holmesra, így azon töri a fejét, mit tegyen? Kiszállhat az egyetlen közbeeső állomáson, Canterburyben, és ha Moriarty továbbmegy, akkor elkerülik egymást, ha viszont szintén kiszáll, akkor baj van.

Holmes tehát egy szó szerint életbevágóan fontos problémára keresi a *legjobb* megoldást. Kivételes képességei vannak, viszont pontosan emiatt tudja, Moriarty hasonló intelligenciával rendelkezik és várhatóan képes ugyanazt a gondolatmenetet megtalálni, amellyel ő választja ki a megfelelő állomást. Ekkor viszont nem is volt olyan jó az a legjobb megoldás. Hiábavalónak tűnik áttérni a másik megoldásra is, hisz Moriarty is eljuthat erre a következtetésre és szintén válthat.

Ezt a következőképpen önthetjük mátrix játék formába. Holmes a sorjátékos, a döntése Dover (D-vel jelölt) sor, vagy Canterbury (C-vel jelölt sor). Moriarty oszlopjátékos, ugyanezen stratégiákkal. Nem nyilvánvaló viszont, mik legyenek a kifizetési mátrix elemei. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy Holmesnak életben maradni éppen annyit ér, mint Moriartynak holtan látni őt. (Később láthatjuk majd, hogy jóval általánosabb értékek esetén is nagyjából hasonló a helyzet.)

		Moriarty	
		D	C
Holmes	D	-1	1
	C	1	-1

A megoldás a véletlen lehet, már amennyiben elhisszük, hogy még Moriarty sem képes hatékonyan megjósolni, melyik oldalára esik egy feldobott érme. Ha Holmes Dvert és Canterburyt egyaránt $1/2 - 1/2$ eséllyel választja, akkor Moriarty bármely, ettől független választása esetén nulla lesz a várható kifizetése. Másrészt Moriarty is dobhat érmét, és ezzel elérheti, hogy Holmes kifizetése legfeljebb nulla. Mivel ezek egybeesnek, a $1/2 - 1/2$ valószínűségű véletlen választásnál jobb stratégia nem is adható. Vegyük észre, hogy ez hasonló gondolatmenet, mint amit a nyeregpontnál alkalmaztunk, csak a stratégiák mások, megengedjük a *keverését* a tiszta stratégiáknak.

5.0.8. Kevert stratégiák, minimax tétel

Általában tegyük fel, hogy a sorjátékos egy $x = (x_1, \dots, x_m)$ vektor segítségével, míg az oszlopjátékos egy $y = (y_1, \dots, y_n)$ vektorral választja meg a játékát, azaz a sorjátékos x_i valószínűséggel választja meg az i -edik sort, míg az oszlopjátékos y_j -vel a j -edik oszlopot. Ekkor a sorjátékos várható nyereménye:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = xAy.$$

Természetesen $x_i \geq 0$ és $y_j \geq 0$, ha $i = 1, \dots, m$ és $j = 1, \dots, n$, valamint $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ és $\sum_{j=1}^n y_j = 1$.

4. Definíció. Egy vektort **sztochasztikusnak** nevezzünk, ha a komponensei nem negatívak és összegük egy. Egy sztochasztikus vektor által definiált stratégiát (azaz fordulóról fordulóra független választást a komponensek, mint valószínűségek szerint) hívunk **kevert stratégiának**.

Speciálisan a tiszta stratégiák olyan kevert stratégiák, ahol a vektor egyik komponense egy, az összes többi pedig nulla.

Az előzőekhez hasonlóan látható, hogy egy x kevert stratégiát választva a sorjátékos várható nyereménye legalább $\min_y xAy$, ahol y sztochasztikus vektor. A sorjátékos természetesen egy olyan x^* sztochasztikus vektort igyekszik találni, melyre az előző érték a lehető legnagyobb. Hasonlóan egy y kevert stratégia mellett az oszlopjátékos garantáltan nem veszít többet átlagosan, mint $\max_x xAy$, ahol x sztochasztikus vektor, célja pedig ezen érték minimalizálása. A két érték jelentéséből nyilvánvaló, hogy

$$\min_y xAy \leq \max_x xAy$$

Sokkal meglepőbb, hogy az egyenlőség általában is elérhető, azaz vannak olyan x^* , y^* sztochasztikus vektorok, melyekre

$$\min_y x^*Ay = \max_x xAy^*.$$

Ez az egyenlőség az ún. *minimax tétel*.¹ x^* és y^* rendre a sor és az oszlopjátékos optimális stratégiája, hisz az általuk garantálnál jobb eredmény nem érhető el. Az állítás formája emlékeztethet bennünket a dualitásra, és valóban, igazából ekvivalensek, bár ez távolról sem nyilvánvaló.

¹Másképpen $\max_x \min_y xAy = \min_y \max_x xAy$, ahol x, y sztochasztikus vektorok.

22. Tétel. (Minimax tétel) Minden $m \times n$ -es A mátrixra van olyan x^* m -dimenziós sztochasztikus sorvektor és olyan y^* n -dimenziós sztochasztikus oszlopvektor, melyekre

$$\min_y x^* Ay = \max_x x Ay^*,$$

ahol a minimumot az összes n -dimenziós sztochasztikus oszlopvektoron, míg a maximumot az összes m -dimenziós sztochasztikus sorvektoron vesszük.

Bizonyítás: Az első észrevétel, hogy $\min_y x Ay = \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i$.² Szavakban ez azt jelenti, hogy a sorjátékos egy x kevert stratégiájára van az oszlopjátékosnak olyan *tiszta* stratégiája, amely optimális számára. Ezt a következőképp láthatjuk be: Legyen $t = \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i$. Ha y tetszőleges m -dimenziós sztochasztikus oszlopvektor, akkor

$$x Ay = \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \right) \geq \sum_{j=1}^n y_j t = t \sum_{j=1}^n y_j = t,$$

így persze a $\min_y x Ay \geq t$ is igaz. Másrészt mivel azok az y vektorok, amelyeknek egy komponense egy, a többi nulla, sztochasztikus vektorok is egyben, így

$$\min_y x Ay \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i$$

minden $j = 1, 2, \dots, n$ esetén és ez adja az állítás másik irányát. (Hasonlóképp belátható, hogy $\max_x x Ay = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j$.)

A fenti észrevétel nagyban egyszerűsíti a dolgunkat, mert a sorjátékos optimális stratégiájának meghatározásánál csak az oszlopjátékos *tiszta* stratégiáit kell figyelembe vennünk. Azaz

$$\begin{aligned} \max_j \min_i \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i & \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^m x_i & = 1 \quad (*) \\ x_i & \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

²Az elő tisztán algebrai bizonyítást a minimax tételre Loomis adta [46]. Az itt közölt bizonyítás Gale, Kuhn és Tucker [30] eredménye, melyben Loomis elgondolásait és az *erős dualitás tételt* ötvözik.

A következő fontos lépés annak felismerése, hogy bár ez a probléma nem lineáris programozási feladat, röviden LP, de ekvivalens egy ilyen feladattal.

$$\begin{aligned} \max \quad & z \\ z - \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i & \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^m x_i & = 1 \quad (**) \\ x_i & \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

Valóban, a (**) probléma bármely z^*, x_1^*, \dots, x_m^* optimális megoldása legalább egy $z - \sum a_{ij}x_i \leq 0$ egyenlőtlenségnek egyenlőséggel tesz eleget, így az LP optimuma $z^* = \min \sum a_{ij}x_j$.

Analóg módon, az oszlopjátékos optimális stratégiáját leíró

$$\begin{aligned} \min \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j & \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^n y_j & = 1 \\ y_j & \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

ekvivalens a

$$\begin{aligned} \min \quad & w \\ w - \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j & \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m y_i & = 1 \quad (***) \\ y_j & \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

LP feladattal. Vegyük észre, hogy a (**) és (***) egymás duálisai, és mindkettőnek van lehetséges megoldása. Így a dualitási tétel szerint a (**) -nak van egy z^*, x_1^*, \dots, x_m^* optimális megoldása, a (***) -nak van egy w^*, y_1^*, \dots, y_n^* optimális megoldása úgy, hogy $z^* = w^*$. Mivel $z^* = \min_y x^*Ay$, $w^* = \max_x xAy^*$, a tételt beláttuk. \square

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a minimax tétel bizonyítása egyben algoritmust is ad az optimális stratégiák kiszámolására. (Neumann eredeti bizonyítása egy mély topológiai eredményt, az ún. Brouwer fixpont tételt használta, ami nem konstruktív.) Borel 3×3 -as és 5×5 -ös mátrixokra belátta a minimax tételt, de nem tudta túltenni magát azon a paradox jelenségen, hogy a játékosnak *nem* származik előnye abból, ha a kevert stratégiáját titokban tartja. (És persze hátránya sem abból, ha ezt közli.) Valószínűleg ez a tényleg meglepő eredmény gátolta meg abban, hogy bizonyítsa a tételt általánosan is.

5. Definíció. *A közös $v = z^* = w^*$ érték az A mátrix játék értéke.³ Az A mátrix játék igazságos, ha $v = 0$, és szimmetrikus, ha $a_{ij} = -a_{ji}$.*

Vegyük észre, hogy a szimmetrikus játék esetén maga az A mátrix antiszimmetrikus, azaz $A^T = -A$. Továbbá $a_{ii} = 0$ minden i -re.

23. Következmény. *Egy szimmetrikus mátrix játék igazságos. Ha az x optimális stratégiája a sorjátékosnak, akkor az x^T egy optimális stratégiája az oszlopjátékosnak.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a játék szimmetrikus. A 22. Tétel szerint létezik x^* vektor, amely optimális stratégiája a sorjátékosnak. Válassza az oszlopjátékos az x^* vektor transzponáltját. Ezzel a sorjátékos várható kifizetése

$$x^* A x^{*T} = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i^* x_j^* = \sum_{i < j} a_{i,j} x_i^* x_j^* + \sum_{i < j} a_{j,i} x_i^* x_j^* = 0,$$

azaz a sorjátékos maximális kifizetése nem lehet nullánál nagyobb. Ha az oszlopjátékos egy optimális y^* stratégiáját vesszük, teljesen hasonlóan adódik, hogy a sorjátékos az y^* transzponáltját használva elérheti, hogy ne fizessen rá a játékra. Az 22. Tételből tudjuk, hogy a játéknak van valamilyen v értéke. Mivel egyik félnek sem lehet pozitív várható nyeresége, a v csak nulla lehet. \square

5.0.9. A Morra játék

János és Emil a következők szerint játszik: egy fordulóban elrejtenek egy vagy két forintot, majd tippelnek, mennyit dugott az ellenfél. Ha pontosan egy játékos tippel jól, akkor annyit nyer, amennyit *közösen* elrejtettek. Az összes többi esetben döntetlen lesz, pénzüknél maradnak. Nyilvánvaló, hogy egy-egy játékban mindketten a következő négy stratégia közül választhatnak:

³Ha az a_{rs} nyeregpont, akkor a játék értéke $v = a_{rs}$.

Rejts k -t és tippelj ℓ -et (röviden $[k, \ell]$), ahol $k = 1, 2$ és $\ell = 1, 2$. Ezek János és Emil *tiszta stratégiái*, a hozzájuk tartozó A mátrix pedig:

		Emil tiszta stratégiái			
		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
János tiszta stratégiái	[1,1]	0	2	-3	0
	[1,2]	-2	0	0	3
	[2,1]	3	0	0	-4
	[2,2]	0	-3	4	0

Mivel az A mátrixnak nincs nyeregpontja, a 22. Tétel bizonyításában használt LP feladatot kell megoldanunk az optimális stratégiák megkereséséhez. Nyilván ez egy szimmetrikus játék, így a 23. Következmény alapján joggal várhatjuk, hogy a Morrában János (és persze Emil is) elkerülheti a veszteséget. Valóban, a Morrához tartozó LP

$$\begin{array}{rcll}
 \max & z & & \\
 & z & + 2x_2 - 3x_3 & \leq 0 \\
 & z - 2x_1 & & + 3x_4 \leq 0 \\
 & z + 3x_1 & & - 4x_4 \leq 0 \\
 & z & - 3x_2 + 4x_3 + & \leq 0 \\
 & & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \geq 0
 \end{array}$$

János egy optimális stratégiája az $x^* = (0, 3/5, 2/5, 0)$, Emilé pedig az x^* vektor transzponáltja, míg a játék v értéke természetesen nulla.

5.0.10. A módosított Morra

A játékok elmélete (és a matematika) tele van meglepetéssel, és látszólagos ellentmondásokkal. Tegyük fel, hogy János és Emil változtattak egy kicsit a Morra szabályain, mert például nem tudják *egyszerre* deklarálni a tippjeiket, előre leírni pedig nincs kedvük. A józan ész azt súgja, erre nincs is szükség, hisz Emil azzal, hogy a saját tippjét bejelenti, semmit sem mond el arról, ami a kezében van. Természetes hát azt gondolni, hogy a módosított Morra is igazságos.

Alkalmazzuk rá az elméletünket. János az eddigieken kívül négy új tiszta stratégiával rendelkezik: $[k, S]$ és $[k, D]$ $k=1, 2$, ahol az első koordináta azt mondja meg, hányat rejtsen, a második, hogy ugyanazt (S) vagy ellenkező (D) tippet mondja be,

mint Emil. Az új mátrix a következő:

Emil tiszta stratégiái

		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
János tiszta stratégiái	[1,1]	0	2	-3	0
	[1,2]	-2	0	0	3
	[2,1]	3	0	0	-4
	[2,2]	0	-3	4	0
	[1,S]	0	0	-3	3
	[1,D]	-2	2	0	0
	[2,S]	3	-3	0	0
	[2,D]	0	0	4	-4

Megoldva a hozzátartozó LP-t egy optimális stratégia János számára például az $x^*=(0, 56/99, 40/99, 0, 0, 2/99, 0, 1/99)$. Emil optimális stratégiája $y^*=(28/99, 30/99, 21/99, 20/99)^4$. A játék értéke pedig $z^* = w^* = 4/99$. Azaz a játék határozottan előnyösebb János számára, ami első pillantásra nehezen érthető. Feloldódik a paradoxon, ha arra gondolunk, hogy bár Emil nem ad információt a kezében lévő pénzről, de ad információt az éppen megjátszott stratégiájáról. Így az már nem teljesen ismeretlen János számára, következésképp ő ki is használhatja ezt.

5.1. Egyszerűsítési lehetőségek

5.1.1. Dominancia

Egy mátrix játék vizsgálatát célszerű azzal kezdeni, van-e nyeregpontja a mátrixnak. Ha nincs, akkor is van esély a számítási igény mérsékelésére. Szükségtelen stratégiák elhagyásával csökkenthetjük a játékosok tiszta stratégiáinak számát, míg a játék „lényege” nem változik.

⁴A gyenge dualitás tétel miatt az Olvasó az LP megoldása nélkül is ellenőrizheti az (x^*, y^*) megoldás pár optimalitását.

6. Definíció. Az A kifizetési mátrix egy r sora **dominálja** az s sort, ha $a_{rj} \geq a_{sj}$ minden $j=1, 2, \dots, n$ esetén. Hasonlóan egy r oszlop **dominálja** az s oszlopot, ha $a_{ir} \geq a_{is}$ minden $i=1, 2, \dots, m$ -re.

24. Tétel. Egy mátrix játékra az alábbiak igazak:

- (i) Ha egy r sort dominál egy másik sor, akkor a sorjátékosnak van olyan x^* optimális stratégiája, ahol $x_r^* = 0$. Speciálisan, ha az r sort töröljük a mátrixból, akkor nem változik a játék értéke.
- (ii) Ha egy s oszlop dominál egy másik oszlopot, akkor az oszlopjátékosnak van olyan y^* optimális stratégiája, amelyben $y_s^* = 0$. Speciálisan, ha az s oszlopot töröljük a mátrixból, akkor nem változik a játék értéke.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az r sort dominálja az s sor. (Hasonlóan járhatunk el akkor, ha az s oszlop dominálja az r oszlopot.) A minimax tétel miatt létezik egy x^* , y^* optimális stratégia pár a játékra. Módosítsuk az x^* stratégiát (\bar{x}) úgy, hogy $\bar{x}_i := x_i^*$, ha $i \neq r, s$, $\bar{x}_r := 0$ és $\bar{x}_s := x_s^* + x_r^*$. (Szavakban: mikor a stratégia az r -edik sort játszaná, akkor játszuk helyette az s -ediket.) A dominancia miatt nyilvánvaló, hogy a sorjátékos várható nyereménye nem csökken. \square

Példa:

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 7 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A_1 -ben a 3. oszlop dominálja a 4. oszlopot.

$$A = A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A_2 -ben a 3. sor dominálja a 2. sort:

$$A = A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 & -3 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A_3 -ban az 1. oszlop dominálja a 3. oszlopot:

$$A = A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A_4 -ben a 2. sor dominálja a 3. sort:

$$A = A_5 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

A_5 -ben a 3. oszlop dominálja a 2. oszlopot:

$$A = A_6 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

További egyszerűsítés már nem lehetséges, marad tehát az eredeti A mátrix 1. és 3. sora, illetve 2. és 4. oszlopa, mint tiszta stratégia. A probléma innen könnyen megoldható, ezt tesszük a következő pontban.

5.1.2. $2 \times n$ -es és $m \times 2$ -es mátrixok

Ha a játék mátrixa $2 \times n$ -es vagy $m \times 2$ -es, akkor a hozzátartozó LP feladat közvetlenül megoldható. Ugyanis például a $2 \times n$ -es esetben a sorjátékos kevert stratégiái egyváltozós optimalizálásra vezetnek, egy x kevert stratégiára $x = (\alpha, 1 - \alpha)$.

A 22. tétel bizonyításának első pontja szerint elég a

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \min \{a_{1,1}\alpha + a_{2,1}(1 - \alpha), a_{1,2}\alpha + a_{2,2}(1 - \alpha), \dots, a_{1,n}\alpha + a_{2,n}(1 - \alpha)\}$$

feladatot megoldani. Azaz a célfüggvény csak α -tól függ és a $[0, 1]$ intervallumon kell maximalizálni. A célfüggvény itt n darab lineáris függvény *alsó burkolója*. Az optimum lesz a játék v értéke, az α^* optimális helyből pedig az x^* optimális stratégia adódik $x^* = (\alpha^*, 1 - \alpha^*)$.

Analóg módon járhatunk el az $m \times 2$ esetben; itt az oszlopjátékos stratégiája $y = (\beta, 1 - \beta)$ alakú, a feladat pedig:

$$\min_{0 \leq \beta \leq 1} \max \{a_{1,1}\beta + a_{1,2}(1 - \beta), a_{2,1}\beta + a_{2,2}(1 - \beta), \dots, a_{m,1}\beta + a_{m,2}(1 - \beta)\}.$$

A játék érték újfent az optimum, az oszlopjátékos y^* optimális stratégiája a *felső burkoló* β^* minimum helyéből jön, $y^* = (\beta^*, 1 - \beta^*)$.

Szerencsés esetben vagy 2×2 mátrixra mindkét játékos optimális stratégiája megkapható, ilyen az előző példa befejezése:

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \min\{3\alpha - 2(1 - \alpha), -6\alpha + 4(1 - \alpha)\} = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \min\{5\alpha - 2, -10\alpha + 4\},$$

amiből az optimum hely a két egyenes metszete $\alpha^* = 2/5$, $v = 0$. Az eredeti 4×5 játékra $x^* = (2/5, 0, 3/5, 0)$. Az y^* -hoz optimalizáljunk az felső burkolón

$$\min_{0 \leq \beta \leq 1} \max\{3\beta - 6(1 - \beta), -2\beta + 4(1 - \beta)\} = \min_{0 \leq \beta \leq 1} \max\{9\beta - 6, -6\beta + 4\},$$

és így $\beta^* = 2/3$, összeségében pedig $y^* = (0, 2/3, 0, 1/3, 0)^T$.

Megjegyzés. A nyeregpont és a dominancia segítségével végrehajtott egyszerűsítések függetlenek egymástól, elképzelhető, hogy az egyik működik, a másik nem.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Az $a_{33}=2$ nyilvánvalóan nyeregpont, de nincs a mátrixban sor vagy oszlop dominancia. Ez a lehető legkisebb példa, a 2×2 -es esetben a dominancia és a nyeregpont egyszerre jelenik meg.

5.2. Blöff és alullicitálás

Kártyajátékokban gyakran előfordul, hogy a játékosok blöffölnek, holott a lap bemutatása esetén veszítenének. (Hozzátehetjük, nemcsak kártyajátékban van ez így.) Másrészt nem mindig kezdeményeznek licitet (azaz konfrontációt), habár azt biztosan megnyernék. Ezt a viselkedést az emberi intuícóra hivatkozással szokták kezelni, mely úgymond felülemelkedik a hétköznapi logikán. Egy, Kuhn által 1950-ben vizsgált egyszerű játékkal illusztráljuk, hogy ez nem így van, s a pókerjátékos viselkedése tökéletesen racionális.

A játékot 3 lappal (1, 2, 3) játszik, mindkét játékos egységnyi pénzt tesz be és kap egy lapot. Ezután felváltva licitálnak/fogadnak, emelnek egységnyivel vagy passzolnak. A játék akkor fejeződik be, ha egy emelésre emelés, passzra passz, vagy emelésre passz hangzik el. Az első két esetben megnézik a lapokat, és a nagyobb lapot tartó viszi az összes tétet, amit az ellenfél fogadott. A harmadik esetben a passzoló játékos elveszti a játék elején betett alapját.

Az alábbi öt kimenetel lehetséges ezek alapján (A és B a játékosok, a fogad, illetve passzol a játszásban tett akciók, a végén pedig a nyeremény).

A passzol, B passzol	1 a magasabb lapot birtoklónak.
A passzol, B fogad, A passzol	1 B-nek.
A passzol, B fogad, A fogad	2 a magasabb lapot birtoklónak.
A fogad, B passzol	1 A-nak.
A fogad, B fogad	2 a magasabb lapot birtoklónak.

A lapok leosztása után A -nak három *lehetősége* van. (Ezek még nem A tiszta stratégiái, azokba be kell foglalni azt is, hogy A ismeri saját lapját.)

1. Passz, és ha B fogad, újra passz
2. Passz, és ha B fogad, fogad
3. Fogad

Egy teljes utasítás készletet, amely A számára egyértelműen megmondja mit tegyen egy $x_1x_2x_3$ hármassal írhatunk le úgy, hogy az x_j lehetőséget játssza, ha a j lapot kapta. Például a 312 szerint A fogad, ha 1 van a kezében, mindig passzol, ha a 2-öt kapta, míg passzol az első fordulóban a 3-ra, a másodikban pedig fogad rá. Ezek a hármások tehát A tiszta stratégiái. Hasonlóan B -nek négy lehetősége van.

1. Passz, bármit csinál A
2. Ha A passzol, passz; ha A fogad, fogad
3. Ha A passzol, fogad; ha A fogad, passz
4. Fogad, bármit csinál A .

B tiszta stratégiái az $y_1y_2y_3$ hármásokkal írhatók le úgy, hogy az y_j a j lap birtoklásakor játszandó lehetőség. A tiszta stratégia párok kimenetelét annak figyelembe vételével számítjuk ki, hogy a lehetséges hat leosztás egyforma valószínűségű. Például ha A a 312, B pedig az 124 tiszta stratégiát használja, akkor a hat lehetséges játszma és kimenetel az alábbi:

A kezében	B kezében	játék menete	A nyereménye
1	2	A fogad, B fogad	-2
1	3	A fogad, B fogad	-2
2	1	A passzol, B passzol	+1
2	3	A passzol, B fogad, A passzol	-1
3	1	A passzol, B passzol	+1
3	2	A passzol, B passzol	+1

Így A várható nyereménye $= 1/6 (-2-2+1-2+1+1) = -1/3$. Hasonló módon kiszámíthatjuk a többi lehetőséget is. A $3 \times 3 \times 3 = 27$, míg B $4 \times 4 \times 4 = 64$ tiszta stratégiával rendelkezik, ami egy 27×64 -es mátrix vizsgálatát írja elő. Ennek közvetlen vizsgálata, bár lehetséges, meglehetősen komplikált lenne. Megpróbálkozunk hát redukcióval, amely jelentősen csökkenti a probléma mértékét, de szolgáltat egy-egy optimális kevert stratégiát, illetve ezeken keresztül a játék értékét is.

Kezdjük azzal, hogy az 1 lapot birtokolva bármely játékos fölöslegesen veszítene egy egységet, ha egy fogadásra fogadással válaszolna, nem pedig passzal. Ugyanígy, ha a 3-as lap van a kezében, értelmetlen lenne egy fogadásra passzal válaszolni, továbbá egy paszt követően nyugodtan fogadhat. Kijelenthetjük tehát, hogy A -nak van legalább egy optimális kevert stratégiája, amelyben:

- (i) Ha 1 van a kezében, nem játsza a 2. lehetőséget.
- (ii) Ha 3 van a kezében, nem játsza az 1. lehetőséget.

Ugyanígy B -nek van olyan optimális kevert stratégiája, amelyben:

- (i) Ha 1 van a kezében, nem játsza a 2. és 4. lehetőséget.
- (ii) Ha 3 van a kezében, nem játsza az 1., 2. és 3. lehetőségét.

Úgy képzeljük ezt, hogy a $2x_2x_3$ és az x_1x_21 tiszta stratégiák egyszerűen elérhetetlenek A számára, csak úgy, mint B számára a $2y_2y_3$, $4y_2y_3$, y_1y_21 , y_1y_22 és az y_1y_23 tiszta stratégiák. Elképzelhető, hogy ezzel elveszítjük az optimális stratégiák *egy részét*, de bizonyos marad legalább egy optimális kevert stratégiája mind A -nak, mind B -nek. Ebből következően a redukált játék értéke megegyezik az eredetivel.

A fenti tiszta stratégiák kiküszöbölése után A -nak 12, B -nek 8 tiszta stratégiája marad. Mi több, további egyszerűsítésre adódik alkalom. Ha A -nak 2 van a kezében, akár passzolhat is az első fordulóban, hisz B tartózkodik a 2. lehetőségtől, ha 1-et birtokol, illetve az 1. és 3. lehetőségtől, ha 3. tart a kezében. Így viszont A második

lehetősége pont olyan jó, mint a 3. Eldobhatjuk hát A tiszta stratégiái közül az x_13x_3 -at. Hasonlóan, ha B a 2 lapot kapta, akkor az 1. lehetősége ugyan olyan jó, mint a 3., és 2. se rosszabb, mint a 4. Ezek alapján B tiszta stratégiái közül elhagyható az y_13y_3 és az y_14y_3 .

Ezek után A -nak már csak 8, B -nek pedig 4 tiszta stratégiája marad, a redukált játék mátrix pedig áttekinthetőbb (s céljainknak megfelel).

	114	124	314	324
112	0	0	-1/6	-1/6
113	0	1/6	-1/3	-1/6
122	-1/6	-1/6	1/6	1/6
123	-1/6	0	0	1/6
312	1/6	-1/3	0	-1/2
313	1/6	-1/6	-1/6	-1/2
322	0	-1/2	1/3	-1/6
323	0	-1/3	1/6	-1/6

Az ebből keletkező LP feladatokat megoldva A számára egy optimális kevert stratégia az $(1/3, 0, 0, 1/2, 1/6, 0, 0, 0)$, B számára a $(2/3, 0, 0, 1/3)$, a játék értéke pedig $-1/18$. A játék, ahogy sejtettük, nem igazságos. A optimális stratégiáját célszerű egyszerűbb utasításokká alakítani:

- (i) Ha 1 van a kezében, akkor keverje az 1. és 3. lehetőséget 5 : 1 arányban.
- (ii) Ha 2 van a kezében, akkor keverje az 1. és 2. lehetőséget 1 : 1 arányban.
- (iii) Ha 3 van a kezében, akkor keverje a 2. és 3. lehetőséget 1 : 1 arányban.

Vegyük észre, hogy az instrukció blöffre buzdít (azaz fogadásra az első menetben, mikor a legkisebb lapot - 1-et - kapta A) hat esetből egyszer, és tartózkodásra a tét emelésétől (azaz passzra az első menetben a legnagyobb lap birtoklásakor) az esetek felében. Hasonlóképp fogalmazható B optimális stratégiája:

- (i) Ha 1 van a kezében, akkor keverje az 1. és 3. lehetőséget 2 : 1 arányban.
- (ii) Ha 2 van a kezében, akkor keverje az 1. és 2. lehetőséget 2 : 1 arányban.
- (iii) Ha 3 van a kezében, akkor válassza mindig a 4. lehetőséget.

Ezzel B kis lapot (1, 2) tartva az esetek egyharmadában blöfföl, a licittől viszont nem tartózkodik sohasem.

5.3. A Yao elv és alkalmazása

A bonyolultság legnehezebb problémái az alsó korlátokkal kapcsolatosak, azaz meg kell mondani, hogy egy adott erőforrásból legalább mennyire van szükség egy feladat megoldásánál. Ezt kérdezhetjük a legrosszabb esetben vagy az átlagos esetben, míg a választ többnyire az input méretének⁵ függvényében keressük.

További nehézséget jelent, ha *véletlen algoritmusokról* van szó, itt természetesen az átlagos eset vizsgálatnak van értelme. A *Yao elv* éppen ekkor hasznos, összeköt két, látszólag távoli dolgot: a véletlent használó algoritmusokat és a véletlen inputokat. Sokoldalúan használható technika (ezért is kapta az elv nevet), mi itt két formáját és alkalmazását tekintjük át.

5.3.1. Az eredeti forma és egy példa alkalmazása

Tekintsünk egy F feladat osztályt fix input mérettel, és egy véges sok véletlen bitet felhasználó algoritmust erre a feladatra. Ha rögzítjük ezeket a véletlen biteket, akkor egy determinisztikus algoritmust kapunk, amit címkézhetünk ezzel a bitsorozattal. Így a véletlen algoritmus fölfogható egy véletlen eloszlásnak a determinisztikus algoritmusok egy halmazán.

Használjuk az alábbi jelöléseket: \mathcal{D} determinisztikus algoritmusok egy halmaza F osztályra, \mathcal{R} a véletlen algoritmusok \mathcal{D} -ből a fenti módon képzett halmaza. \mathcal{S} az összes lehetséges inputok halmaza, \mathcal{P} az összes eloszlások halmaza \mathcal{S} -en, és $f : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Az $f(D, \sigma)$ azt jelenti, mennyi erőforrást igényel a $D \in \mathcal{D}$ determinisztikus algoritmus, ha az $\sigma \in \mathcal{S}$ inputon számol.

Az erőforrás felhasználás felfogható, mint egy játék; a sorjátékos egy σ inputot választ, az oszlopjátékos pedig egy D algoritmust, míg az A mátrix $a_{(\sigma, D)}$ eleme $f(D, \sigma)$.⁶ A Yao elv alkalmazása az, ha megadjuk az inputoknak egy d eloszlását, amelyre minden determinisztikus algoritmus várhatóan legalább K költségű, akkor véletlen algoritmusok várható költsége sem lehet K -nál kisebb a legrosszabb esetben.

25. Lemma (Yao elv). [71]

$$\sup_{d \in \mathcal{P}} \inf_{R \in \mathcal{D}} \mathbb{E}_d[f(R, \sigma_d)] \leq \inf_{R \in \mathcal{R}} \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathbb{E}_R[f(R, \sigma)]$$

⁵A méret alatt az input leírásához szükséges bitek számát értjük.

⁶Ez a mátrix végtelen is lehet, így az alábbi lemma nem egyszerű következménye a minimax tételnek. Továbbá, míg a minimax tételnél az egyenlőség fontos, itt igazából a triviális egyenlőtlenség a lényeg.

Bizonyítás: Legyen $\sup_{d \in \mathcal{P}} \inf_{R \in \mathcal{D}} \mathbb{E}_d[f(R, \sigma_d)] = C$ és tegyük fel, hogy van olyan $R \in \mathcal{R}$, hogy $\sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathbb{E}_R[f(R, \sigma)] < C$. Ekkor viszont minden $d \in \mathcal{P}$ -re áll a $\mathbb{E}_d[\mathbb{E}_R[f(R, \sigma)]] < C$. Mivel C véges, használhatjuk a Fubini tételt, azaz

$$\mathbb{E}_d[\mathbb{E}_R[f(R, \sigma)]] = \mathbb{E}_R[\mathbb{E}_d[f(R, \sigma)]] < C.$$

Ebből adódik, hogy létezik olyan $D \in \mathcal{D}$, melyre $\mathbb{E}_d[f(D, \sigma)] < C$. □

Keressük a pénzt

Adott n számozott doboz és az egyik tartalmaz egy bankjegyet. Ahhoz, hogy lásuk egy doboz tartalmát, ki kell nyitni, és a minimális számú nyitással szeretnénk megtalálni a pénzt. Nem túl meglepő, bár a Yao elv nélkül nehezen bizonyítható az alábbi állítás:

26. Lemma. *A legjobb véletlen algoritmus várható nyitásszáma $(n + 1)/2$.*

Bizonyítás: Először egy véletlen algoritmust javaslunk: Dobjunk egy szabályos érmét, és ha fej, akkor nézzük meg a dobozokat $\{1, 2, \dots, n\}$, ha pedig írás, akkor az $\{n, n - 1, \dots, 1\}$ sorrendben. A várható nyitásszám $(n + 1)/2$, hisz ha a pénz az i -edik dobozban van, akkor egyaránt $1/2$ valószínűséggel i illetve $n - i + 1$ lépést teszünk, azaz a kinyitandó dobozok száma átlagosan $(n + 1)/2$.

A Yao elv használjuk az alsó korláthoz. Helyezzük a bankjegyet véletlen egyenletes eloszlással az n doboz valamelyikébe. Egy determinisztikus algoritmusok közül elég azokat nézni, amelyek nem nyitnak ki kétszer egy dobozt. A szimmetria miatt feltehető, hogy a legjobb algoritmus az $\{1, 2, \dots, n\}$ sorrendben nyitja ki a dobozokat. A várható lépésszám, és egyben a legjobb véletlen algoritmus várható nyitásszámára adódik

$$\inf_{R \in \mathcal{R}} \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathbb{E}_R[f(R, \sigma)] \geq \sup_{d \in \mathcal{P}} \inf_{R \in \mathcal{D}} \mathbb{E}_d[f(R, \sigma_d)] = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} = \frac{n + 1}{2}.$$

□

5.3.2. Módosított változat és a Simon probléma

Tegyük fel, hogy Boole függvények valamely bonyolultságát (lekérdezés, kommunikációs stb) akarjuk vizsgálni egy rögzített a modellben. Ha F egy Boole függvény, legyen $R_\epsilon(F)$ a minimális bonyolultságú az összes véletlen algoritmus közül, amelyik az F -et legalább $1 - \epsilon$ valószínűséggel helyesen számolja ki minden x inputra. Legyen a $D_\epsilon^\mu(F)$

pedig a minimális bonyolultság az összes olyan determinisztikus algoritmusra nézve, amelyik helyesen számolja ki az F -et legalább $1 - \epsilon$ részben, ahol a μ eloszlás szerint átlagolunk. Ekkor a Yao elv a következő alakban írható:

27. Lemma. $\max_{\mu} D_{\epsilon}^{\mu}(F) = R_{\epsilon}(F)$.

Bizonyítás: A sorjátékos tiszta stratégiái azon determinisztikus algoritmusok, amelyek fix számú ($\leq c$) lekérdezést használhatnak, így a kevert stratégiái éppen a c -nél nem több kérdést feltevő véletlen algoritmusok. Az oszlopjátékos tiszta stratégiái a lehetséges inputok⁷, a kevert stratégiái pedig az inputok összes lehetséges eloszlásai. A kifizetési mátrix $M_{Ax} = 1$, ha az A algoritmus helyesen számolja ki a függvényt az x inputra, 0 különben. A minimax tétel Loomis-féle alakját felírva erre

$$\min_{\mu} \max_A e_A^T M \mu = \max_{\rho} \min_x \rho^T M e_x.$$

Itt $e_A^T M \mu$ az inputok azon része, μ -vel súlyozva, amelyre az A helyesen számol, illetve a $\max_A e_A^T M \mu$ az a rész, amelyet az optimális, legfeljebb c kérdést feltevő determinisztikus algoritmus helyesen számol ki. Így összeségében a $\min_{\mu} \max_A e_A^T M \mu$ a legnagyobb rész, amelyet a legfeljebb c -t kérdő algoritmusok képesek helyesen kiszámolni a legnehezebb input mellett. Másrészt a $\rho^T M e_x$ annak a valószínűsége, hogy a ρ eloszlás szerinti determinisztikus algoritmusok helyesen számolnak az x input mellett, így a $\min_x \rho^T M e_x$ a legnehezebb inputra vett sikeres számolás valószínűsége. Azaz $\max_{\rho} \min_x \rho^T M e_x$ a sikeres számolás legnagyobb valószínűsége a legnehezebb inputra, amiből adódik a lemma. \square

A Simon probléma

Jelentse az $x \otimes y$ az x és y vektorok összeadását az \mathbb{F}_2 , azaz a kételemű test fölött. Legyen f olyan Boole függvény az $\{0, 1\}^n$ -ből $\{0, 1\}^n$ -be melyre létezik egy $s \in \{0, 1\}^n$ úgy, hogy $f(x) = f(x \otimes s)$ minden x esetén. A különböző modellekben megfogalmazott feladat az s meghatározása a lehető legkevesebb kérdéssel. Az egyik játékos választ egy $x \in \{0, 1\}^n$ vektort, a másik pedig megmondja az $f(x)$ értékét.⁸

A determinisztikus legrosszabb eset. A választ adó játékos amíg teheti, nem ismételi, azaz a feltett x_1, x_2, \dots, x_k -ra csupa különböző $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)$ -t mond. Ha valamely $1 \leq i < j \leq k$ -ra $f(x_i) = f(x_j)$, abból $s = x_i \otimes x_j$. Másrészt k különböző válasz $\binom{k}{2}$ lehetőséget kizár s értékére, éppen az $x_i \otimes x_j$ -ket, ahol $1 \leq i < j \leq k$. Mivel

⁷A végeesség miatt csak véges sok determinisztikus algoritmus jöhet szóba.

⁸Lásd a korábbi példákat.

s -re eredetileg 2^n lehetőség van, a választ adó játékos elkerülheti az ismétlést amíg $\binom{k}{2} < 2^n$, azaz $k < 2^{n/2}$ esetén még nem határozható meg s .

A nem determinisztikus eset. Itt a választ adó „játékosnak” előre rögzítenie kell s -et, és felmerül, hátha egy véletlen algoritmussal nagy valószínűséggel már kevesebb kérdéssel is meghatározható s . Valójában egy egyszerűbb kérdés, az $s = (0, \dots, 0)$ is nehéznek bizonyul:

28. Tétel. *Bármely véletlen algoritmus, amely $2/3$ valószínűséggel eldönti, hogy s egyenlő-e a $(0, \dots, 0)$ -val legalább $\Omega(2^{n/2})$ kérdést tesz fel.*

Bizonyítás: A Yao elvet használva egy olyan μ eloszlást adunk a függvényeken, amelyen minden olyan D determinisztikus algoritmus, amely legfeljebb az esetek $1/3$ részében hibázik, $T = \Omega(2^{n/2})$ kérdést fel kell tegyen. Dobjunk fel egy érmét, és ha fej legyen f egy véletlen permutáció a $\{0, 1\}^n$ -en. Ebben az esetben $s = (0, \dots, 0)$. A másik esetben vegyünk egy nem nulla s -et véletlenül, és minden $x, x \otimes s$ párra az $f(x) = f(x \otimes s)$ értéket a $\{0, 1\}^n$ -ből visszatevés nélkül véletlenül húzzuk ki.

Legyen az első esetben $s = (0, \dots, 0)$. Feltehetjük, hogy az algoritmus sohasem kérdez rá ugyanarra a pontra kétszer. Ekkor a válaszok egy T , csupa különböző elemből álló sorozatot alkotnak és bármely ilyen sorozat egyenlő valószínűséggel fordul elő.

Ha $s \neq (0, \dots, 0)$, az algoritmus f -től függően kérdezte az x_1, \dots, x_T sorozatot és kapta az $f(x_1), \dots, f(x_T)$ válaszokat. Legyen az x_1, \dots, x_T sorozat jó, ha $f(x_i) = f(x_j)$ valamely $i \neq j$ -re, rossz különben. Ha jó a sorozat, akkor s megvan, hisz $s = x_i \otimes x_j$. Ha viszont rossz a sorozat, akkor egyenlő valószínűséggel minden csupa különböző elemből álló sorozat előfordulhat, csakúgy, mint az $s = (0, \dots, 0)$ esetben. A lényeg persze az, hogy a rossz eset valószínűsége majdnem egy, ha T kicsi.

Ha az x_1, \dots, x_{i-1} rossz, akkor, ahogy korábban láttuk, $\binom{i-1}{2}$ értékét zártuk ki s -nek, az összes többi még egyformán valószínű. Az x_i -vel akkor válik az eddig rossz sorozat jóvá, ha az $f(x_i) = f(x_j)$ valamely $j < i$ -re, vagy másképpen az $s \in S = \{x_i \otimes x_j \mid j < i\}$. Mivel S -nek $i-1$ eleme van, míg s egyenletesen oszlik el $2^n - 1 - \binom{i-1}{2}$ értéken, ennek a valószínűsége elég kicsi:

$$\Pr(x_1, \dots, x_T \text{ rossz}) = \prod_{i=2}^T \Pr(x_1, \dots, x_i \text{ rossz} \mid x_1, \dots, x_{i-1} \text{ rossz}) =$$

$$\prod_{i=2}^T \left(1 - \frac{i-1}{2^n - 1 - \binom{i-1}{2}} \right) \geq 1 - \sum_{i=2}^T \frac{i-1}{2^n - 1 - \binom{i-1}{2}},$$

ahol az $(1-a)(1-b) \geq 1-(a+b)$, ha $a, b \geq 0$ egyenlőtlenséget használtuk. Az utolsó formula alulról becsülhető $1 - T^2/2^n$ -el, azaz a rossz sorozat valószínűsége csak akkor esik $1/3$ alá, ha $T = \Omega(2^{n/2})$. \square

Megjegyzés. Még meglepőbb, hogy egy másik modellben, a kvantum számítógép használata mellett polinom sok kérdés is elegendő s kiszámítására. De, stílszerűen mondva, ez már nem játék.

6. fejezet

Nem zérus összegű játékok

Az életben előforduló játékoknak csak kis része zérus összegű, a legtöbb esetben nem ez a helyzet. Ezekkel a játékokkal hihetetlenül sokféle problémát modellezhetünk. Sajnos ennek ára van. A zérus összegű játékok elméletében oly hasznosnak bizonyult kevert stratégiák általában nem adnak jó választ, mi több, már azt sem könnyű megfogalmazni mit értsünk optimális megoldás alatt. Nem áll módunkban az összes koncepció ismertetése, még kevésbé részletes elemzése. Ehelyett vázolunk néhány lényeges ötletet, elsősorban olyanokat, melyek beleillenek az eddigi tárgyalásmódunkba.

A Nash egyensúly létezése véges játékokban

A bizonyításokban a Brouwer fixponttételt vagy az általánosabb Kakutani fixponttételt használják. Mi az egyszerűbb Brouwer tételt választjuk, annál is inkább mert ez sok szállal kapcsolódik a kombinatorikus játékokhoz.

Definíciók. Egy $G = (N, X, u)$ véges n -személyes (nem-kooperatív) játék az alábbi:

$N = \{1, 2, \dots, n\}$, a játékosok halmaza,

$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, ahol minden k -ra $X_k = \{1, \dots, m_k\}$, azaz egy m_k elemű véges halmaz, az k -adik játékos tiszta stratégiáinak halmaza,

$u : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow R^n$, *kifizető függvény*, amelynek k -adik komponense a k -adik játékos nyereménye egy adott $(i_1, \dots, i_n) \in X$ stratégia n -es mellett.

A mátrixjátékokhoz hasonlóan értelmezhetjük a kevert stratégiákat, az k -adik játékosra ez X_k^* ,

$$X_k^* = \{p_k = (p_{k,1}, \dots, p_{k,m_k}) : p_{k,i} \geq 0, \text{ minden } i\text{-re, és } \sum_{i=1}^{m_k} p_{k,i} = 1\}.$$

A játékosok egy adott kevert stratégiájára, azaz $p = (p_1, \dots, p_n)$ esetén a k -adik játékos várható kifizetése $g_k(p_1, \dots, p_n)$,

$$g_k(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} p_{1,i_1} \cdots p_{n,i_n} u_k(i_1, \dots, i_n).$$

Jelölje továbbá $g_k(p_1, \dots, p_n|i)$ a k -adik játékos várható kifizetését, ha a k -adik játékos a p_k kevert stratégiáról az $i \in X_k$ tiszta stratégiára vált át,

$$g_k(p_1, \dots, p_n|i) = g_k(p_1, \dots, p_{k-1}, \delta_i, p_{k+1}, \dots, p_n|i),$$

ahol a δ_i az az eloszlás, amely az i -t egy valószínűséggel veszi fel. Vegyük észre, hogy a $g_k(p_1, \dots, p_n)$ visszanyerhető a $g_k(p_1, \dots, p_n|i)$ -k ismeretében, ugyanis

$$g_k(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{m_k} p_{k,i} g_k(p_1, \dots, p_n|i).$$

Definíció: Egy $(p_1, \dots, p_n) \in X^*$ kevert stratégia *Nash egyensúlyi helyzet*, ha minden $k = 1, \dots, n$ -re és minden $i \in X_k$ -ra

$$g_k(p_1, \dots, p_n|i) \leq g_k(p_1, \dots, p_n).$$

29. Tétel. Minden véges n -személyes játéknak van Nash egyensúlyi helyzete.

Bizonyítás: Minden k -ra X_k^* kompakt és konvex részhalmaza az R^n -nek, ezért a $C = X_1^* \times \cdots \times X_n^*$ is kompakt és konvex része az R^m -nek, ahol $m = \sum_i^n m_i$. Definiáljuk az f függvényt úgy, hogy a $z = (p_1, \dots, p_n) \in C$ -re $f(z) = z' = (p'_1, \dots, p'_n)$, ahol

$$p'_{k,i} = \frac{p_{k,i} + \max(0, g_k(p_1, \dots, p_n|i) - g_k(p_1, \dots, p_n))}{1 + \sum_{j=1}^{m_k} \max(0, g_k(p_1, \dots, p_n|i) - g_k(p_1, \dots, p_n))}.$$

Minden $p_{k,i} \geq 0$ és a nevezőt úgy választottuk, hogy $\sum_{j=1}^{m_k} p'_{k,i} = 1$, ezért $z' \in C$. Továbbá az f függvény folytonos, hiszen minden $g_k(p_1, \dots, p_n)$ függvény folytonos. Így használhatjuk a Brouwer fixpont tételt, vagyis van olyan $z' = (q_1, \dots, q_n) \in C$, amelyre $f(z') = z'$. Ekkor viszont

$$q_{k,i} = \frac{q_{k,i} + \max(0, g_k(z'|i) - g_k(z'))}{1 + \sum_{j=1}^{m_k} \max(0, g_k(z'|i) - g_k(z'))}$$

minden $k = 1, \dots, n$ és $i = 1, \dots, m_n$ -re. Másrészt a $g_k(z')$ az átlaga a $g_k(z'|i)$ számoknak, így $g_k(z'|i) \leq g_k(z')$ legalább egy olyan i -re, amelyre $q_{k,i} > 0$. Mivel a z' fixpont, erre az i -re igaz, hogy $\max(0, g_k(z'|i) - g_k(z')) = 0$, azaz

$$q_{k,i} = \frac{q_{k,i}}{1 + \sum_{j=1}^{m_k} \max(0, g_k(z'|i) - g_k(z'))}.$$

Ez csak úgy lehet, ha $\sum_{j=1}^{m_k} \max(0, g_k(z'|i) - g_k(z')) = 0$, azaz $g_k(z'|i) \leq g_k(z')$ minden k -ra és i -re. Ez viszont azt jelenti, hogy (q_1, \dots, q_n) Nash egyensúlyi helyzet. \square

Megjegyzés: A bizonyításból látható, hogy az egyensúlyi helyzetek megkeresése az f fixpontjainak a megkeresését jelenti. Ez a mátrixjátékok esetén lineáris programozási feladatra vezetett, általában sajnos sokkal nehezebb dolgunk van.

6.1. Bimátrix játékok

Ha két játékos van, akkor két $m \times n$ -es A és B mátrixszal leírhatók a sor és az oszlopjátékos kifizető függvényei; speciálisan ezt *bimátrix játéknak* vagy (A, B) játéknak hívjuk. Ezekben jóval többet lehet tudni a Nash egyensúlyokról, bár algoritmikus szempontból jóval nehezebbek, mint a mátrixjátékok. Az első észrevétel analóg a minimax tétel bizonyításának első lépésével. Az egyszerűség kedvéért legyen $M = \{1, \dots, m\}$, $N = \{m + 1, \dots, m + n\}$, $b_j x = \sum_{i=1}^m b_{i,j} x_i$ és $a_i y = \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j$, azaz a_i (b_j) az A (B) mátrix i -edik (j -edik) sor (oszlop) vektora.

30. Tétel (Nash). *Az (x, y) kevert stratégia pár Nash egyensúlya az (A, B) játéknak akkor és csak akkor, ha minden $i \in M$ és $j \in N$ esetén*

$$x_i > 0 \Rightarrow a_i y = \max_{k \in M} a_k y \quad \text{és} \quad y_j > 0 \Rightarrow b_j x = \max_{k \in N} b_k x.$$

Bizonyítás: Ha $x_i > 0$ és van olyan k , amelyre $\sum_{j=1}^n a_{k,j} y_j > \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j$, akkor rögzített y mellett az x_i csökkentése növeli a sorjátékos kifizetését. A másik állítás hasonlóan látható be. \square

A 30. tétel feltétele sajnos nem vezet lineáris programozási feladatra¹, ezért jóval nehezebb egyetlen egyensúlyt is megtalálni, nemhogy az összeset. Ha megelégszünk egy megoldással, akkor használható az 1964-ben publikált Lemke-Howson algoritmust. A fő ok persze a megelégedésre a Lemke-Howson algoritmus központi szerepe; hasonló az ötleten alapul Herbert Scarf híres tételének vagy David Gale hex tételének a bizonyítása.

6.1.1. A Lemke-Howson algoritmus

Először átfogalmazzuk a 30. tétel feltételét egy címkézésbe. Jelentse X illetve Y a sor és oszlopjátékosok kevert stratégiáinak halmazait, és minden $i \in M$ és $j \in N$ esetén

¹Kvadratikusan optimalizálási vagy lineáris komplementaritási feladatként felírható, lásd [65].

vegyük az alábbi halmazokat:

$$X(i) = \{x \in X \mid x_i = 0\} \text{ és } X(j) = \{x \in X \mid b_j x \geq b_k x \ \forall k \in N\},$$

$$Y(i) = \{y \in Y \mid a_i y \geq a_k y \ \forall k \in M\} \text{ és } Y(j) = \{y \in Y \mid y_j = 0\}.$$

Az x vektornak legyen k egy címkéje, ha $x \in X(k)$, és hasonlóan y egy címkéje k , ha $y \in Y(k)$ valamely $k \in M \cup N$.

31. Tétel. *Egy (x, y) kevert stratégia pár Nash egyensúly akkor és csak akkor, ha minden $k \in M \cup N$ esetén vagy $x \in X(k)$ vagy $y \in Y(k)$ (vagy mindkettő) teljesül.*

Bizonyítás: Ha az (x, y) Nash egyensúly, akkor a 30. tétel miatt minden $k \in M \cup N$ vagy x -nek vagy y -nak címkéje, hisz ha például $k \in M$ és $x \notin X(k)$, akkor $x_k > 0$, azaz az $y \in Y(k)$ kell álljon. (A $k \in N$ eset teljesen hasonló.) Másrészt, ha az (x, y) pár teljesen címkézett, akkor az $x_i > 0$ esetén az x nem rendelkezik az i címkével, azaz az y -nak kell. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy $a_i y \geq a_k y$ minden $k \in M$, azaz $a_i y = \max_{k \in M} a_k y$. Az $y_j > 0$ eset ismét hasonlóan bizonyítható. \square

Definíció: Egy x vektor *tartója*, $\text{supp}(x) := \{i \mid x_i > 0\}$. Egy bimátrix játék nem degenerált, ha bármely kevert stratégia az ellenfél legjobb tiszta stratégiáinak a száma nem haladja meg az adott kevert stratégia tartójának méretét.

Megjegyzés. Belátható, hogy a nem degeneráltság azt jelenti, a teljesen címkézett pontpárok, azaz a Nash egyensúlyok pontok. Pontosabban ha egy (x, y) ilyen, akkor vannak olyan $K, L \subset M \cup N$, hogy $|K| = m$ és $|L| = n$, az x és az y pedig a címkékből adódó egyenlőtlenségek *egyértelmű* megoldásai. Így ezeknek a poliédereknek a csúcsai között kell lenni Nash egyensúlynak, ha az van egyáltalán.²

Az algoritmus leírásához a G_1 és G_2 gráfokat használjuk. G_1 pontjai az X halmaz m címkével rendelkező elemei és a $0 \in R^M$, melyet M elemeivel címkézünk. Két pont közt akkor van él, ha $m - 1$ közös címkéjük van. A G_2 gráfot hasonlóan definiáljuk; itt a pontok az Y halmaz n címkéjű elemei, a $0 \in R^N$, amely a N elemeivel címkézett és él $n - 1$ közös címke esetén vannak két pont között.

Definíció: A G_1 és G_2 gráfok *szorzata* $G_1 \times G_2$ az a gráf, amelynek ponthalmaza $\{(x, y) \mid x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$, az $((x, y), (x', y')) \in E(G_1 \times G_2)$ ha $x = x'$ és $(y, y') \in E(G_2)$ vagy $y = y'$ és $(x, x') \in E(G_1)$.

Egy $k \in M \cup N$ -re az $(x, y) \in V(G_1 \times G_2)$ *k-majdnem teljesen címkézett*, ha minden $\ell \in M \cup N \setminus \{k\}$ előfordul vagy x vagy y címkéjeként. A $G_1 \times G_2$ egy éle pedig akkor *k-majdnem teljesen címkézett*, ha mindkét végpontjának címkéi csak a k -t nem tartalmazzák.

²A 29. tételtől független bizonyítást adunk a Nash egyensúly létezésére.

Minden $(x, y) \in V(G_1 \times G_2)$ egyensúlypont pontosan egy (x', y') k -majdnem teljesen címkézett ponttal szomszédos. (Ha például k az x címkéje, akkor egy szakasz pontjai elégítik ki a maradék címkék által meghatározott egyenlőtlenségeket. Ennek a szakasznak az egyik végpontja x , a másik lesz az x' , míg $y' = y$. Hasonló a helyzet, ha k az y címkéje.)

Ha egy (x, y) k -majdnem teljesen címkézett, akkor pontosan két szomszédja van $G_1 \times G_2$ -ben, hiszen ha elhagyjuk az x és y közös címkéjét, akkor G_1 -ben vagy G_2 -ben vehetünk egy-egy szomszédot: a keletkező szakaszok másik végpontjának megfelelő gráfpontot. Azaz, ha a G^k a $G_1 \times G_2$ k -majdnem teljesen címkézett *élei* által feszített részgráfot jelöli, akkor egy pont G^k -beli fokszáma vagy egy vagy kettő. (A nulla fokú pontok nem részei a feszített részgráfnak.) Ebből egyből jön Lemke és Howson tétele:

32. Tétel. *Legyen (A, B) egy nem degenerált bimátrix játék és $k \in M \cup N$. A G^k gráf diszjunkt utakból és körökből áll. Az utak végpontjai az egyensúlyi helyzetek és a $(0, 0)$ mesterséges egyensúly. Speciálisan a Nash egyensúlyi helyzetek száma páratlan.*

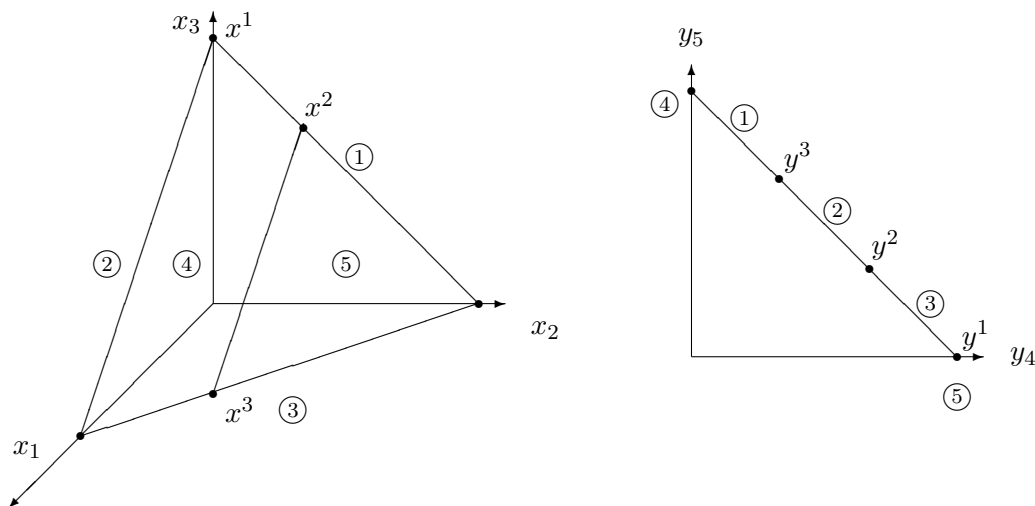
A Lemke-Howson algoritmus a $(0, 0)$ pontból indul, kiválasztunk egy $k \in M \cup N$ -et és a k -majdnem teljesen címkézett éleken lépkedünk és az út másik végpontjába érve egyensúlyi ponthoz érkezünk. Megjegyezzük, hogy nem minden egyensúly kapható meg a $(0, 0)$ -ból, azaz lehet olyan egyensúly, amely minden k -ra másik komponensben van, mint a $(0, 0)$. Megmutatható az is, hogy minden $n \in N$ -re és páratlan $\ell \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ -re van olyan $n \times n$ -es (A, B) játék, amelynek pontosan ℓ számú Nash egyensúlya van.

Példa: Az (A, B) bimátrix játékban

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (0, 1) & (6, 0) \\ (2, 0) & (5, 2) \\ (3, 4) & (3, 3) \end{pmatrix}.$$

A metszéspontok koordinátái: $x_1 = (1, 0, 0)$, $x^1 = (0, 0, 1)$, $x_2 = (0, 1, 0)$, $x^2 = (0, 1/3, 2/3)$, $x^3 = (2/3, 1/3, 0)$, $y^1 = (1, 0)$, $y^2 = (2/3, 1/3)$, $y^3 = (1/3, 2/3)$, $y_5 = (0, 1)$, míg $0_1 = (0, 0, 0)$ illetve $0_2 = (0, 0)$. $V(G_1) = \{0_1, x_1, x^1, x_2, x^2, x^3\}$, $V(G_2) = \{0_2, y^1, y^2, y^3, y_5\}$ és az alábbi k -majdnem teljesen címkézett utakat kapjuk:

$$\begin{aligned} k = 1: & P_1^1 = (0_1, 0_2), (x_1, 0_2), (x_1, y^1), (x^1, y^1) \text{ és } P_1^2 = (x^2, y^2), (x^3, y^2), (x^3, y^3) \\ k = 2: & P_2^1 = (0_1, 0_2), (x_2, 0_2), (x_2, y_5), (x^3, y_5), (x^3, y^3) \text{ és } P_2^2 = (x^1, y^1), (x^2, y^1), (x^2, y^2) \\ k = 3: & P_3^1 = (0_1, 0_2), (x^1, 0_2), (x^1, y^1) \text{ és } P_3^2 = (x^2, y^2), (x^2, y^3), (x^3, y^3) \\ k = 4: & P_4^1 = (0_1, 0_2), (0_1, y^1), (x^1, y^1) \text{ és } P_4^2 = (x^2, y^2), (x_2, y^2), (x_2, y^3), (x^3, y^3) \\ k = 5: & P_5^1 = (0_1, 0_2), (0_1, y_5), (x_1, y_5), (x_1, y^3), (x^3, y^3) \text{ és } P_5^2 = (x^1, y^1), (x^1, y^2), (x^2, y^2) \end{aligned}$$



6.1.2. 2×2 -es játékok

Ahogy a zérusösszegű esetben, itt is lehet egyszerűbb megoldást találni. Ez azért hasznos, mert 2×2 -es játékokkal tanulságos helyzetek modellezhetőek és további általánosításokat vagy éppen specializációkat támaszthatnak alá.

Az első eszköz dominancia, amivel tiszta egyensúlyokat kereshetünk. Az $(x^*, y^*) = ((x, 1-x), (y, 1-y))$ kevert stratégiákhoz felírjuk az f és g kifizetésfüggvényeket, ahol

$$f(x, y) = (x, 1-x)A(y, 1-y)^T \quad \text{illetve} \quad g(x, y) = (x, 1-x)B(y, 1-y)^T.$$

Az egyensúlyt a $\partial f(x, y)/\partial x = 0$, $\partial g(x, y)/\partial x = 0$ egyenletrendszer megoldása adja. Észrevehető, hogy a Nash egyensúlyok szerkezete (száma, elhelyezkedése stb.) csak az A és B mátrixok elemeinek nagyságszerinti sorrendjétől függenek, a konkrét értékektől nem. Ennek alapján Rapoport és Guyer megmutatta, hogy 78 lényegesen különböző 2×2 játék létezik. Nem minden játék egyformán érdekes, ha például ha $a_{1,1} > a_{1,2} \geq a_{2,1} > a_{2,2}$ és $b_{1,1} > b_{2,1} \geq b_{1,2} > b_{2,2}$, akkor az egyedüli Nash egyensúly az $x^* = y^* = (1, 0)$, és az játékban sem várható más próbálkozás. Négy játék viszont problémásnak bizonyult, ezek a fogolydilemma, a gyáva nyúl, vezérürü és a nemek harca.³

Az alábbiakban ezeket mutatjuk be, lehetőleg életszerű helyzetekben ahol a megoldás szavakban értelmezhető és tanulságos.

³Eredetileg *Prisoner's dilemma*, *Chicken game*, *Leader game* és *Battle of sexes*.

Fogolydilemma. Ezt a széles körben ismert példát először Tucker írta le. Ez a vádalku lassan nálunk is meghonosodó intézménye által keletkező „játék” egy klasszikus mátrixa. A két elkülönített gyanúsított bevallhat egy bűncselekményt vagy tagadhatja azt. Ha mindketten vallanak, akkor 5 évet kapnak, míg ha csak az egyik, akkor ő elmehet és a társa kap tíz évet. Ha egyik sem vall, akkor csak egy évet érő cselekményt tudnak rájuk bizonyítani.

	vall	tagad
vall	-5, -5	0, -10
tagad	-10, 0	-1, -1

Ebben a „közös optimum” (Pareto optimum) a tagad-tagad, ami nyilván nem Nash egyensúlyi helyzet, hisz a vall-vall az egyedüli ilyen.

Megjegyzés. A fogolydilemma többdimenziós általánosításának tekinthető az ún. *közlegelők tragédiája* játék. Ebben n játékos használhatja a közösen tulajdont együttműködő vagy önző módon. Ha k önző játékos van, akkor az együttműködő játékosok $(2n - k - 2)/n$, míg az önzők $(2n - k + 2)/n$ kifizetést kapnak. A Pareto optimum az együttműködés $2 - 2/n$ nyereséggel, viszont bármely esetben az együttműködő játékos növelheti az esedékes kifizetését önzéssel. Így az egyetlen Nash egyensúly a teljes önzés, $k = n$, ami $1 - 2/n$ -es kifizetést hoz; a játékosok nyereseményének az összege minimalizálódik.

Gyáva nyúl. A versengés másik alaptípusa jelenik meg ebben a játékban. Itt két egymással szemben hajtó autós közül az veszít, aki kitér. Viszont ha egyikük sem tér ki, akkor összeütköznek és a veszteség még nagyobb:

	kitér	nem tér ki
kitér	0, 0	-1, 2
nem tér ki	2, -1	-10, -10

Itt két tiszta NE van, $x^* = (0, 1)$, $y^* = (1, 0)$ és az $x^* = (1, 0)$, $y^* = (0, 1)$. Az fenti módon definiált függvények

$$f(x, y) = 9x + 12y - 11xy - 10 \quad \text{és} \quad g(x, y) = 9y + 12x - 11xy - 10.$$

Az $\partial f(x, y)/\partial x = 9 - 11y = 0$, $\partial g(x, y)/\partial y = 9 - 11x = 0$ egyenletrendszer megoldása $x = y = 9/11$, azaz a kevert egyensúly ebben $x^* = (9/11, 2/11)$, $y^* = (9/11, 2/11)$.

Nem világos persze, mit értsünk a kevert stratégián az ilyen esetekben, hogyan valósulhat meg az. Lényegében azonos szerkezetű a következő példa, csak az interpretáció más.

Vezérürü. Egy ajtóban összefut két ember, és szeretnének udvariasnak látszani, azaz előreengedni a másikat. Ha egyszerre indulnak, az kétségkívül kellemetlen, de a legrosszabb, ha csak várnak egymásra. Számokkal kifejezve például:

	indul	vár	
indul	1, 1	2, 3	
vár	3, 2	0, 0	

Itt két tiszta Nash egyensúly és az $x^* = y^* = (1/2, 1/2)$ kevert egyensúly van.

Nemek harca. Ebben a játékban egy házaspár esti programjának a szervezést modellezzük. A férfi jobban szeretne moziba menni, a feleség színházba. Mindkettőjüknek fontos az is, hogy együtt legyenek. Egy lehetséges mátrixpár erre:

		feleség	
		mozi	színház
férj	mozi	5, 3	2, 2
	színház	0, 0	3, 5

Az $x^* = y^* = (1, 0)$ és az $x^* = y^* = (0, 1)$ tiszta Nash egyensúlyok, illetve létezik egy kevert egyensúly is, $x^* = (5/6, 1/6)$, $y^* = (1/6, 5/6)$. A probléma egyrészt a kooperációban rejlik; míg a fogolydilemmában az önzés okozza a Pareto optimumtól való eltérést, itt éppen az önzetlen viselkedés okozhatja a legnagyobb bajt. A kevert stratégia ezen egy kicsit segít, 13/6-os várható kifizetéssel.

6.1.3. Evolúciósan stabil stratégia

Először a gyáva nyúl és a nemek harca játék új alkalmazásait adjuk meg, melyek jóval realiztikusabbak.

Galamb-héja. A modell illetve a játékelmélet evolúciós biológiában való felhasználása John Maynard Smith gondolata. Egy galambfajon belül - találkozás esetén - két egyed között kétféle viselkedés lehetséges: kitérnek egymás elől vagy harcba kezdenek. A kitéréssel esetleg elvesztenek egy erőforrást (pár, élelem, fészkelőhely stb), míg a konfliktus sérüléssel, energia vagy idő pocséklással jár. Ha mindkét galamb kitérne, akkor az egyikük megszerzi az erőforrást, legyen ez egyenlő esélyű. Egy „galamb” azaz békés egyed találkozik egy „héjával” azaz egy harcias egyeddel, akkor a „galamb” kitér, elkerüli a sérülést, de elveszti az erőforrást, ami így a „héja” zsákmánya lesz. Két „héja” találkozása mindkettőre nézve jelentős hátránnyal jár.

Az egyedek vagy egyik, vagy a másik viselkedést követik; kérdés, melyik a jobb? Könnyen látható, akár egyik, akár másik viselkedés válik kizárólagossá, egy olyan egyed, amely ettől a normától elér jelentős előnybe kerül.

Tehát a cél egy olyan stabil helyzet megtalálása, melyben az egyed számára nincs ok változtatni a viselkedésén. Oldjuk meg ezt egy fiktív kifizetési mátrix esetén.

	galamb	héja
galamb	2, 2	-1, 5
héja	5, -1	-9, -9

Az „galamb-héja” eloszlás x és $1 - x$, azaz x valószínűséggel békés egy egyed, $1 - x$ -szel agresszív. Feltéve, hogy a populáció elég nagy, egy „galamb” várhatóan $2x - 1(1 - x) = 3x - 1$, egy „héja” pedig $5x - 9(1 - x) = 14x - 9$ nyereséget könyvelhet el. Egyensúly, akkor van, ha $3x_0 - 1 = 15x_0 - 9$, vagyis $x_0 = 2/3$. Tehát a populáció előre meghatározható arányban mutat békés vagy harcias viselkedést.⁴ Nem meglepő, ha csökkentjük az erőforrás értékét illetve az időét, akkor a békés, míg ha a sérülés kockázatát, akkor a harcias viselkedés terjed a populációban. Ezt az aprócska modellt nehéz túlértékelni: meglepően széles a jelenségek köre, melyre képes magyarázatot adni.

Szerkezetében azonos a nemek harcával a *melyik oldalon haladjunk az útnak* játék. Két autó halad egymással szemben és a találkozásnál dönteniük kell az út jobb vagy bal szélére húzódnak. A kissé fiktív 10 értéket rendelve a biztonságos továbbhaladáshoz, illetve az összeütközéshez az alábbi mátrixot kapjuk:

	Bal	Jobb
Bal	1, 1	-10, -10
Jobb	-10, -10	1, 1

Mind a (Bal, Bal), mind a (Jobb, Jobb) Nash egyensúlyi helyzet, de ez nem sokat segít rajtunk, ha belekényszerülünk egy ilyen játékba. A társadalmi konvenciókkal szokás koordinálni az efféle szituációkat, s mint tudjuk a konkrét esetre mindkét megoldásra van példa. Így aztán nem is baj, hogy a modellünk megoldása nem egyértelmű. Ha az lenne, akkor már nem az életet írná le, hanem az előítéleteinket. Mi több, létezik egy kevert egyensúly $x^* = (1/2, 1/2)$ és $y^* = (1/2, 1/2)$. Ez történik a gyalogos forgalomban, vagy egyes állítások szerint az indiai Bangalore-ban.⁵

Felmerül a kérdés, mi egyáltalán a különbség a galamb-héja és a nemek harca játék között? Mindkettőben két-két tiszta és egy kevert NE van. Az egyensúlyok azonban nagyon nem egyformák. A galamb-héja játékban a kevert egyensúly kis változtatás esetén visszaáll, a másokban viszont az egyik tiszta stratégiába zuhan.

⁴A játékok alkalmazása elég nehéz, hisz ritkán ismerjük a pontos kifizetéseket és a játékos racionalitása sem garantálható. Figyelemre méltó, hogy a leginkább racionális viselkedést nem a tudatos gondolkodás, hanem az öröklött tulajdonságok okoznak.

⁵Minden nap reggel véletlenül áll be a forgalom egyik vagy másik oldalra.

A Nash egyensúly ezen tulajdonságát az *evolúciósan stabil stratégia*, röviden ESS fogalmával ragadhatjuk meg.

Definíció. A x^*, y^* eloszláspár evolúciósan stabil stratégia az (A, B) bimátrix játékban, ha van olyan $\epsilon > 0$, hogy bármely x, y eloszlások esetén,

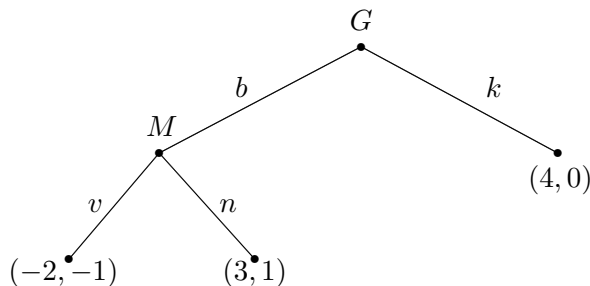
$$xAy^* < x^*Ay^* \text{ és } x^*Ay < x^*Ay^*,$$

ha $\|x^* - x\| < \epsilon$ és $\|y^* - y\| < \epsilon$.

Nyilvánvaló, hogy minden ESS Nash egyensúly is egyben, így a fogalom az egyensúlyok finomabb osztályozását adja. Az alkalmazásokban pedig azt jelenti, hogy hosszabb távon csak ESS képzelhető el.

6.1.4. Extenzív forma, részjáték tökéletes egyensúly

A nem zérusösszegű játékokat kezelhetjük a kombinatorikus játékokhoz hasonlóan, egy fával leíva az időben egymás után következő döntéseket; ez az *extenzív formája* egy játéknak. Tipikus példa az *áruházlánc játék*. Ebben a piacon lévő multi (M) mellé léphet be egy garázsbolt (G). Időben először G dönt, belép-e, b vagy kimarad, k , majd M , hogy árversenyt indítson-e, v vagy nem n . A levelekre M és G kifizetését írjuk.



Egy extenzív formához mindig van normál forma, jelen esetben az alábbi:

		G	
		belép	kimarad
M	versenyez	-2, -1	4, 0
	nem versenyez	3, 1	4, 0

Két tiszta NE van $x^* = (0, 1)$, $y^* = (1, 0)$, $x^* = (1, 0)$, $y^* = (0, 1)$ míg a keverteknek egy végtelen⁶ halmaza $x^* = (1/2, 1/2)$, $y^* = (y, 1 - y)$, $0 \leq y \leq 1$. Ezek az egyensúlyok különbözően interpretálhatóak, és nem egyformán reálisak. M

⁶A degeneráció miatt lehet egynél több.

$x^* = (1/2, 1/2)$ stratégiája felfogható, mint egy (nem túl hihető) *fenyegetés*, amellyel megpróbálja G -t elrettenteni a belépéstől. Az $x^* = (1, 0)$, $y^* = (0, 1)$ csak vágyalom, hisz G kezdi a játékot, és ha egyszer már belépett, akkor egyedül az $x^* = (0, 1)$, $y^* = (1, 0)$ NE jöhet létre.

Mivel minden részfához rendelhető normál forma, mindegyikhez tartoznak Nash egyensúlyok. Általában egy NE *részjáték tökéletes egyensúly*, ha a játék egy tetszőleges részfájához rendelt játékokban is NE.

33. Tétel. *Minden véges fával extenzív formában leírt játéknak van részjáték tökéletes egyensúlya.*

Bizonyítás: Teljes indukcióval. A gyökérből elérhető részfákban van tökéletes egyensúly; az éppen lépésen lévő játékos azt az élt választja, amelyik részfában az ottani egyensúly szerinti kifizetése a legnagyobb. \square

Váltott ajánlat játékok. Ezek egy kétszemélyes osztozkodást modelleznek, ahol az egyik játékos x -et, a másik $1 - x$ -et kap, $0 \leq x, 1 - x \leq 1$. Páratlan fordulókban az első, párosokban a második játékos javasol egy x -et. Ha ezt a másik fél pontosan a t -edik fordulóban fogadja el, akkor a rendre a $\delta_1^{t-1}x$, $\delta_2^{t-1}(1 - x)$ utilitásuk lesz, ahol a $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1)$ konstansok. (Az idő múlásával exponenciálisan csökken az utilitás; ez ösztönöz megegyezésre.) A játék befejeződik előre rögzített N lépés után: ha egyik fél sem fogadott el ajánlatot, akkor semmit sem kapnak. A másik lehetőség, hogy tetszőlegesen soká játszanak, ekkor viszont az utilitás a nullához tart.

Ha $N = 1$, akkor az első játékos ajánlhat $x = 1$ -et, a másik semmiképpen sem tudja növelni a nyereményét. $N = 2$ -re a részjáték tökéletes egyensúly $x = \delta_2$, hisz a második játékosnak ezt már nem érdeke elutasítani. Általában ha i tenné meg az utolsó, azaz N ., ajánlatot, akkor legalább δ_i -t kellett kapnia, hogy elfogadja az $N - 1$ -ediket.

Ebből rekurzióval megadható $x_1(N)$, az első játékos kifizetése (nem utilitás!):

$$x_1(N + 2) = 1 - (1 - x_1(N)\delta_1)\delta_2 = 1 - \delta_2 + x_1(N)\delta_1\delta_2.$$

Ha $N = 2k$, akkor

$$x_1(N) = (1 - \delta_2) \sum_{\ell=1}^{N/2-1} (\delta_1\delta_2)^\ell = \frac{(1 - \delta_2)(1 - (\delta_1\delta_2)^{N/2})}{1 - \delta_1\delta_2}.$$

Ha $N \rightarrow \infty$, akkor $x_1(\infty) = (1 - \delta_2)/(1 - \delta_1\delta_2)$.

Hasonlóan kezelhető a végtelen eset, ha u_1, u_2 monoton növekvő utilitás függvényeket is beleveszünk: $\delta_1^{t-1}u_1(x)$, $\delta_2^{t-1}u_2(1 - x)$.

A részjáték tökéletes egyensúly x^*, y^*

$$\delta_1 u_1(x^*) = u_1(y^*) \text{ és } \delta_2 u_2(1 - y^*) = u_2(1 - x^*),$$

attól függően, hogy az első vagy a második játékos teszi az első ajánlatot.⁷ Azaz az első játékos x^* -t ajánl, és elfogadja a legalább y^* ajánlatokat. Hasonlóan a második játékos y^* -ot ajánl, és elfogad minden ajánlatot, amely legalább x^* . Ha $\delta_1 = \delta_2$, akkor a játék *szimmetrikus*.

6.1.5. Korrelált egyensúly

A Nash egyensúlyt 1974-ben általánosította R. Aumann. Az alapgondolat, hogy az X -en, azaz a lehetséges stratégiák összes kombinációján adunk meg egy z eloszlást. Ezen eloszlás szerint válasz egy pártatlan megfigyelő egy $x \in X$ -et, majd minden játékosal közli, neki melyik stratégiát kell megjátszania, hogy x legyen az eredmény. (Nem mondja meg x -et, minden játékos csak a saját stratégiáját tudja meg.) A z eloszlás korrelált egyensúly, röviden KE, ha egyik játékosnak sem éri meg eltérni a megfigyelő javaslatától, feltéve, hogy a többi játékos sem tér el. Az egyszerűség kedvéért bimátrix játékokra formalizáljuk ezt. Legyen (A, B) egy bimátrix játék $m \times n$ -es mátrixokkal és z egy eloszlás rajtuk, azaz $z_{ij} \geq 0$, ha $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ és $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij} = 1$. A sorjátékosnak a megfigyelő az i -edik sort javasolja; ezt játszva $\sum_{j=1}^n a_{ij} z_{ij}$ lenne a várható kifizetése. Ha ehelyett az ℓ -edik sort választja, akkor a kifizetése $\sum_{j=1}^n a_{\ell j} z_{ij}$. Tehát akkor nem éri meg eltérnie a javaslatától, ha

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} z_{ij} \geq \sum_{j=1}^n a_{\ell j} z_{ij}$$

minden $1 \leq i \leq m$ és $\ell \neq i$ -re.

Hasonlóan, a oszlopjátékos kifizetését nézve

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} z_{ij} \geq \sum_{i=1}^m a_{i\ell} z_{ij}$$

minden $1 \leq j \leq n$ és $\ell \neq j$ -re.

Ha x, y egy Nash egyensúly, akkor a $z = x^T y^T$ $m \times n$ -es mátrix egy korrelált egyensúly. Továbbá a fenti feltételek szerint a korrelált egyensúlyok halmaza egy konvex poliéder. Így egyrészt korrelált egyensúlyok konvex kombinációja KE, másrészt

⁷Belátható, hogy a részjáték tökéletes egyensúlynál már az első ajánlatnak olyannak kell lennie, ami elfogadható.

lineáris programozással könnyen adható megoldás, sőt, egy másodlagos célfüggvény is optimalizálható ezek halmazán.

Példa. A galamb-héja játékban az $x^* = y^* = (9/10, 1/10)$ Nash egyensúly várható kifizetése $81/100 + 2(9/100) - 9(1/100) = 9/10$. Ezzel szemben $z_{11} = z_{22} = 0$, $z_{12} = z_{21} = 1/2$ korrelált eloszlás 1 várható kifizetést ad, azaz előnyösebb.

6.1.6. Cournot egyensúly

Szintén kétszemélyes, de nem véges játékkal írta le Cournot a piaci duopólium esetét 1838-ban. Az általa bevezetett fogalom lényegében a Nash egyensúly, ezért *Cournot-Nash egyensúlynak* is nevezik.

Cournot duopólium. Adott két vállalat, amely azonos minőségben ugyanazt a terméket állítja elő. Az első q_1 , a második q_2 mennyiséget dob piacra, ahol az ár a $p(q) = 50 - 3(q_1 + q_2)$ formula szerint alakul. A vállalatok darabonkénti önköltsége rendre 2 illetve 3, azaz a maximalizálni kívánt hasznuk

$$f(q_1, q_2) = (p(q_1, q_2) - 2)q_1 \text{ és } g(q) = (p(q_1, q_2) - 3)q_2.$$

A 2×2 -es játékokhoz hasonlóan a (q_1^*, q_2^*) egyensúly, ha megoldása a

$$\frac{\partial f(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0 \text{ és } \frac{\partial g(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 0$$

egyenletrendszernek. Jelen esetben ez a $q_1 = 49/9$, $q_2 = 46/9$, ami a $p = 55/3$ árat eredményezi, a hasznok pedig rendre $(49)^2/27$ és $(46)^2/27$. Figyelemre méltó, hogy a monopólium vagy kartell, ha az első vállalat technológiáját használja, akkor $q = q_1 = 8$ termelést és $p = 26$ piaci árat hoz, a haszon pedig 192. Azaz kevesebb vásárló jut hozzá a termékhez, és ők is jóval drágábban.

6.1.7. Aukciók.

Az aukció felfogható, mint egy gyors mechanizmus, amely megmutatja egy áru értékét. A legismertebb az *angol aukció*; ebben egy kezdőárról indulva felfelé lehet licitálni. A végén a legtöbbet ajánló vásárló az ajánlatot kifizetve megkapja az árut. Kevésbé ismert a holland aukció, itt egy nagyobb (irreális) kezdőárral kezdenek, de a licit visszafelé folyik, és az elsőként ajánlatot tevő vásárlóé az áru az ajánlatot lefizetve. (Virágot és halat árulnak így, egy visszafelé mozgó mutatójú óra számlapján jelenítve meg az aktuális árat, amelyért elvihető az áru.) A harmadik ismert az Vickrey aukció;

ezt először bélyeg adásvételre használták, majd koncessziók beárazására, illetve a Yahoo! és a Google a hirdetések helyét versenyeztetik. Ebben a potenciális vevők zárt borítékban adják le az ajánlatukat, a legnagyobb ajánlat tevője kapja meg az árut, de a második legnagyobb ajánlat összegét kell megfizetnie. Szokásos egy negyedik forma, itt szintén zárt borítékos megoldás van, de most a győztes a saját ajánlatát fizeti meg.

Ezzel a Vickrey aukció tkp. az angol, míg a negyedik típus a holland aukcióval ekvivalens. Bár nem a leggyakoribb, játékelméleti szempontból a Vickrey aukció igen elegáns, hisz az őszinteség a legjobb stratégia. Tegyük fel, hogy n résztvevője van az aukciónak, és legyen v_i az áru értéke az i -edik játékos számára míg b_i az érte adott ajánlata, $1 \leq i \leq n$. Az i -edik játékos kifizetése

$$f_i = \begin{cases} v_i - \max_{j \neq i} b_j & \text{ha } b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

34. Tétel. *A Vickrey aukcióban a $b_i = v_i$ domináns stratégia.*

Bizonyítás: Ha $b_i > v_i$, akkor az i -edik játékos többet is fizethet az áruért, mint amennyit ér neki, negatív haszonnal zárva. Viszont ha $b_i < v_i$, akkor esetleg elvesztheti, azaz $f_i = 0$, pedig lett volna esélye pozitívrá kifizetésre. \square

7. fejezet

Kooperatív n-személyes játékok

Az n-személyes játékok vizsgálatát Neumann János és Oskar Morgenstern kezdte el. Mint korábban utaltunk rá, nem valamiféle „három személyes sakk”, vagy a futball leírása a cél, hanem a racionális osztozkodás törvényeinek tanulmányozása abban az esetben, mikor a játékosok egy tetszőleges csoportjának „ereje” ismert.

7. Definíció. *Egy n-személyes játék alatt a következő rendszert értjük:*

*Adott az $I = \{1, 2, \dots, n\}$, a játékosok halmaza. Egy $S \subseteq I$ halmazt **koalíciónak** nevezzük, és adott egy $v : 2^I \rightarrow \mathbf{R}$ (a koalíciókhoz egy valós számot rendelő) ún. **karakterisztikus függvény** úgy, hogy*

$$(1.) v(\emptyset) = 0$$

$$(2.) v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \text{ ha } S, T \subseteq I \text{ és } S \cap T = \emptyset.$$

A $v(S)$ jelenti szemléletesen azt a hasznot (kifizetést, hatalmat stb.), amit az S -ben lévő játékosok egymással összefogva együttesen elérhetnek (akár a többiek ellenére is). A $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ az $S \cap T = \emptyset$ esetén azt fejezi ki, hogy a két csoport összefogva legalább annyit elér, mint a külön szerzett haszon összege.¹ Ezt *szuperadditív tulajdonságnak* hívjuk.

Példa 1. *Ingatlan fejlesztés (két vásárlós piac)*

Egy földműves által birtokolt föld mezőgazdasági értéke 100 ezer dollár. Két vevő pályázik rá, az egyik lakásépítéssel 200 ezer, a másik bevásárló központ létrehozásával

¹Az összefogással ezt el is tudják érni, hisz megtehetnék, hogy külön-külön játszanak $v(S)$ illetve $v(T)$ nyereményt szerevve, majd utána egyesítenék a nyereményüket.

300 ezer dollár hasznot érhet el a föld felhasználásával. Vegyük észre, hogy míg a földműves egymagában is képes hasznát venni a földjének, addig az építők nem. Ez a következő 3-személyes játéknak felel meg:

$I = \{1, 2, 3\}$, ahol 1: földműves, 2, 3 pedig a két vevőjelölt.

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= 0 & v(\{1,2\}) &= 200000 \\ v(\{1\}) &= 100000 & v(\{1,3\}) &= 300000 \\ v(\{2\}) &= v(\{3\}) = 0 & v(\{2,3\}) &= 0 \\ & & v(\{1,2,3\}) &= 300000 \end{aligned}$$

Általában az érték a különböző tulajdonosok felhasználásában a , b és c , ahol $a < b < c$.

Példa 2. *A többségi játékok*

Ez a klasszikus 50%+1 szavazattal megvalósuló döntéseket modellezi.

$$I = \{1, \dots, n\}$$

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{esetén „S nyer”} \\ 0 & \text{esetén „S veszít”} \end{cases}$$

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |S| > n/2 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Példa 3. *A súlyozott többségi játékok*

Az i -edik játékosnak w_i szavazata van és q szavazat kell a győzelemhez. $I = \{1, \dots, n\}$

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \sum_{i \in S} w_i \geq q \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Jelöljük ezt a játékot a rövidebb $(q; w_1, w_2, \dots, w_n)$ formával. Vegyük észre, hogy például a $(3; 2, 2, 2, 2)$ „játék” *nem* játék a definíciónk szerint, mert a v függvény *nem szuperadditív*.

8. Definíció. *Egy n -személyes játék egyszerű, ha a v karakterisztikus függvény csak 0 és 1 értéket vesz fel.*

Példa 4. *Az ENSZ Biztonsági Tanács működése.*

A BT-nek 5 állandó és 10 ideiglenes tagja van. Egy határozat életbe lép, ha mind az öt állandó és legalább négy ideiglenes tag megszavazza. Ez felírható, mint $(39; 7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ súlyozott többségi játék.

Imputációk (kifizetések)

Az n -személyes játékokban a játékosoknak jutó *ésszerű* kifizetéseket akarjuk meghatározni. Egy kifizetést egy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -dimenziós valós vektorral írhatunk le, ahol x_i az i -edik játékos része. Aesophus meséjével ellentétben feltesszük, hogy az osztzkodást csak a v karakterisztikus függvény befolyásolja, valamint a játékosok tisztában vannak az érdekeikkel és megvédik azokat.² Szóba jön az alábbi két szempont:

1. $x_i \geq v(\{i\})$, $i = 1, \dots, n$, szóban „Egyéni racionalitás”
2. $\sum_{i=1}^n x_i = v(I)$, avagy „Pareto optimalitás.”

Az 1. pont azt fejezi ki, hogy az egyik játékos sem fogad el olyan kifizetést, amelynél jobbat (mindenféle koalíció nélkül) egymaga is képes elérni. A $\sum_{i=1}^n x_i \leq v(I)$ annyit tesz: nem osztható több, mint amennyi van. Az egyenlőség viszont megköveteli, hogy a játékosok által megszerezhető maximális összeget osszuk szét. (Azaz egyfajta kooperációra „kényszeríthetjük” a játékosokat.)

9. Definíció. Az olyan $x \in \mathbf{R}^n$ vektorokat, amelyekre teljesülnek az 1. és 2. feltételek, **imputációknak** hívjuk, az összes imputáció halmazát pedig $A(v)$ -vel jelöljük.

Példa 4. $I = \{1, 2, 3\}$, $v(S) = 0$, ha $|S| < 2$, míg $v(S) = |S|/3$ különben.

Ekkor az imputációk halmaza

$$A(v) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 x_i = 1\}.$$

Az imputációk $A(v)$ halmaza „túl nagy”, így általában nem tekinthető megoldásnak. Különböző, többé-kevésbé ésszerű feltételekkel szokás szűkíteni az $A(v)$ -t, és a kapott részhalmazt deklarálni a létrejöheto megoldások halmazának. A sokféle megközelítés számos vitára adott alkalmat és a mai napig sem lehet egyértelmű győztest hirdetni. Mi három koncepciót fogunk vázolni, a *mag (core)*, a *stabil halmaz* és a *Shapley érték* fogalmát. Ezek mindegyike nagyon tanulságos.

10. Definíció. Ha $x, y \in A(v)$, akkor egy $\emptyset \neq S \subseteq I$ **hatékonyan preferálja** x -et y -nal szemben, ha $x_i > y_i$ minden $i \in S$ esetén és $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$. Jelben $x \succ_S y$.

²Valóján ez elég erős és az életben ritkán teljesülő feltétel.

Az elnevezés és a motiváció nyilvánvaló. Az $x_i > y_i$ $i \in S$ miatt az S -beli játékosok jobban kedvelik x -et, mint y -t. A $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$ a hatékonyság, ugyanis az S koalíció kikényszerítheti az y elvetését és a számára előnyösebb x_i ($i \in S$) kifizetést garantálhatja tagjainak.

Példa 5. Vegyük a 4. példában szereplő játékot és az $x = (1/3, 5/12, 1/4)$, $y = (1/2, 1/3, 1/6)$ és $z = (9/24, 1/3, 7/24)$ vektorokat. Látható, hogy $x, y, z \in A(v)$, továbbá $x \succ_{\{2,3\}} y$ ($x_2 = 5/12 > 1/3 = y_2$, $x_3 = 1/4 > 1/6 = y_3$, és $x_2 + x_3 = 5/12 + 1/4 \leq v(\{2, 3\}) = 2/3$). Hasonlóan belátható a $z \succ_{\{1,3\}} x$ reláció; ugyanakkor nincs olyan $\emptyset \subsetneq S \subseteq \{1, 2, 3\}$, amelyre $z \succ_S y$. (Ez azt jelenti, hogy míg egy rögzített S -re a „ \succ_S ” reláció tranzitív. Ezzel szemben ha úgy definiálunk egy „ \succ ” relációt, hogy $x \succ y$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\emptyset \neq S \subseteq I$, melyre $x \succ_S y$, akkor ez a „ \succ ” reláció nem tranzitív.)

11. Definíció. Egy n -személyes játék **magja** azon x imputációkból áll, amelyekkel szemben egyetlen y imputációt sem preferál hatékonyan valamely nem üres S koalíció. Jelben a mag $C(v) := \{x \in A(v) : \text{nem létezik olyan } y \in A(v) \text{ és } \emptyset \neq S \subseteq I, \text{ hogy } y \succ_S x\}$.

Példa 6. Vegyük a $(7; 8, 1, 1)$ súlyozott többségi játékot. Itt $v(S) = 1$, ha $1 \in S$ és $v(S) = 0$, ha $1 \notin S$. Ezért $A(v) = \{x : x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ és } \sum_{i=1}^3 x_i = 1\} = \{(1, 0, 0)\}$, azaz $|A(v)| = 1$. Mivel egy imputáció van csak, $A(v) = C(v)$, és így $C(v) = \{(1, 0, 0)\}$. Mint várható volt, az 1 „viszi az egészet.”

7.1. n -személyes játékok, a mag kiszámítása

Egy v karakterisztikus függvényű játék $C(v)$ magjában lévő vektorok joggal tekinthetők ésszerű megoldásoknak. Ezzel azonban nem értünk a problémák végére.

Példa 1. Számoljuk ki a $(2; 1, 1, 1)$ súlyozott többségű játék magját. Tegyük fel, hogy $y \in A(v)$. Ekkor valamely $1 \leq i < j \leq 3$ esetén $y_i + y_j < 1$, hisz $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Megmutatjuk, hogy van olyan $z \in A(v)$ és $\emptyset \neq S \subseteq \{1, 2, 3\}$, amelyre $z \succ_S y$. Az indexek cseréjével feltehetjük, hogy $y_1 + y_2 < 1$, s mintegy a „maradékot” (y_3 -at) szétosztjuk az első és második játékos között: $z_1 := y_1 + y_3/2$, $z_2 := y_2 + y_3/2$. Így persze $z \succ_{\{1,2\}} y$. Másszóval bármely $y \in A(v)$ -re létezik olyan $z \in A(v)$ és nem üres $S \subseteq \{1, 2, 3\}$ halmaz, hogy $z \succ_S y$. Ez persze azt jelenti, hogy a mag az üres halmaz, vagyis nem tudunk jó megoldást javasolni.

Szükségünk van tehát a mag szerkezetének jobb megértésére a kényelmesebb kiszámítás érdekében, másrészt tennünk kell valamit, ha a mag üres. Az első probléma könnyen megoldható: a mag leírható, mint konvex poliéder.

35. Tétel. *Egy v karakterisztikus függvényű n -személyes játékban az x imputáció eleme a magnak akkor és csak akkor, ha minden S koalícióra a $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ egyenlőtlenség teljesül.*

Bizonyítás: Vegyünk egy olyan x vektort, amelyre teljesül az összes, a feltételben levő egyenlőtlenség. Tegyük fel, hogy van olyan $y \in A(v)$ és nem üres $S \subset I$, hogy $y \succ_S x$. Ekkor $y_i > x_i$ minden $i \in S$ és $\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$ a hatékony preferencia miatt, amiből a

$$\sum_{i \in S} y_i \leq v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i < \sum_{i \in S} y_i$$

ellentmondás adódik.

A másik irány bizonyításához tekintsünk egy, a feltétel valamelyik egyenlőtlenségét megsértő $x \in A(v)$ vektort, és legyen $\emptyset \neq S \subset I$, amelyre sérül; azaz $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$. Találni akarunk egy olyan $y \in A(v)$ vektort és $\emptyset \neq T \subset I$ halmazt, amelyre $y \succ_T x$. Az előbbiek miatt $v(S) = \sum_{i \in S} x_i + \epsilon$, ahol $\epsilon > 0$. Az y -t úgy állítjuk elő, hogy az ϵ -t „felosztjuk” az S koalíció tagjai között, azaz $y_i := x_i + \epsilon/|S|$, ha $i \in S$. Kérdés, mi legyen y_i , ha $i \notin S$? Az y vektornak benne kell lennie $A(v)$ -ben, így az egyéni racionalitás feltételeit nem sértheti, azaz $y_i \geq v(\{i\})$ minden $i \in I$. Ezek automatikusan teljesülnek, ha $i \in S$, hiszen $x \in A(v)$ és $y_i > x_i \geq v(\{i\})$ ha $i \in S$. Teljesülnie kell továbbá a Pareto optimalitásnak, vagyis $\sum_{i=1}^n y_i = v(I)$. Keressük hát az y_i -ket $i \notin S$ -re a következő alakban:

$$y_i = v(\{i\}) + \delta_i,$$

ahol $\delta_i \geq 0$. Ezzel

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i \in S} x_i + \epsilon + \sum_{i \notin S} v(\{i\}) + \sum_{i \notin S} \delta_i,$$

amiből a $\sum_{i \in S} x_i + \epsilon = v(S)$ és $\sum_{i=1}^n y_i = v(I)$ miatt következik a

$$v(I) = v(S) + \sum_{i \notin S} v(\{i\}) + \sum_{i \notin S} \delta_i.$$

Átrendezve a δ_i -kre az alábbi feltétel adódik:

$$\sum_{i \notin S} \delta_i = v(I) - v(S) - \sum_{i \notin S} v(\{i\}).$$

Nevezzük a fenti egyenlet jobboldalát δ -nak, és defináljuk majd a δ_i -ket a $\delta_i := \delta / (n - |S|)$ formulával. Ekkor az y imputáció lesz, amennyiben $\delta \geq 0$. (Valóban, hisz $\sum_{i=1}^n y_i = v(I)$ és $y_i \geq v(\{i\})$ $i \in I$ -re.) Végül δ nem negativitásának megmutatására használjuk a v függvény szuperadditivitását; $\sum_{i \notin S} v(\{i\}) \leq v(I \setminus S)$. Így

$$\delta = v(I) - v(S) - \sum_{i \notin S} v(\{i\}) \geq v(I) - v(S) - v(I \setminus S) \geq v(I) - v(I) = 0,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségben ($v(I) \geq v(S) + v(I \setminus S)$) ismét a szuperadditivitást használtuk, és ezzel kész vagyunk. \square

Példa 2. A tétel segítségével kiszámíthatjuk a korábban ismertetett ingatlan fejlesztés játék magját.

\mathbf{v}	$\mathbf{A}(\mathbf{v})$	$\mathbf{C}(\mathbf{v})$
$v(\{1\}) = 100000$	$x_1 \geq 100000$	$A(v)$ elemei, melyekre
$v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$	$x_2 \geq 0$	(iii) $x_1 + x_2 \geq 200000$
$v(\{1, 2\}) = 20000$	$x_3 \geq 0$	(i) $x_1 + x_3 \geq 300000$
$v(\{1, 3\}) = 30000$	(ii) $\sum_{i=1}^3 x_i = 300000$	$x_2 + x_3 \geq 0$
$v(\{2, 3\}) = 0$		
$v(\{1, 2, 3\}) = 300000$		

(i) és (ii) $\Rightarrow x_2 = 0$, (iii) $\Rightarrow x_1 \geq 200000$, azaz a mag a következő:

$$C(v) = \{x : 200000 \leq x_1 \leq 300000, x_2 = 0, x_3 = 30000 - x_1\}.$$

A várakozásnak megfelelően a 2. játékos kizáródik az üzletből, és a földet a 3. veszi meg egy 200 és 300 ezer dollár közti összegért. Ennél többet nem tudunk mondani, de ez természetes, hiszen a valóságban sem dönthető el előre, mi lesz az ár. (Az függhet az alkufolyamattól.)

7.2. Stabil megoldások

Amennyiben a játék magja üres, nem tudunk ésszerű megoldást javasolni, és ez is hasznos információ. Elképzelhető más, stabilitást figyelembe vevő szempont alapján történő választás $A(v)$ -ből. Ez volt Neumann és Morgenstern eredeti gondolata.

Egy korábbi definíciónk egy G irányított gráfban egy független és domináló $S \subseteq V$ ponthalmaz *mag* vagy *stabil halmaz*. (Sajnos a magyar terminológia könnyen zavart okozhat, mivel ez a mag az angolban *kernel*, míg az előző tétellel karakterizált mag az *core*.) Egy n -személyes játék imputációinak $A(v)$ halmaza felfogható egy G_v gráfként; $V(G_v) = A(v)$, és $(x, y) \in E(G_v) \Leftrightarrow x \succ_S y$ valamely $S \subseteq I$ -re.

12. Definíció. *Egy $B \subseteq A(v)$ halmaz stabil megoldás a v karakterisztikus függvényrel meghatározott játékban, ha B mag (kernel, stabil halmaz) a G_v gráfban.*

Megjegyzés: A „másik” mag (core) is leírható a G_v gráf segítségével: $C(v)$ azon pontok halmaza $A(v)$ -ben, amelyekbe nem fut be él, ha mint G_v -beli pontként tekintjük őket.

Az első pillantásra nem nyilvánvaló, mi értelme van a stabil halmazokat megoldásnak tekinteni. Az egyik motiváció lehet a stabil párosítási probléma, amelynek a megoldásai éppen egy gráf stabil halmazai. Továbbá stabil halmaz létezhet akkor is, ha a mag (core) üres.

Példa 3. A $(2; 1, 1, 1)$ súlyozott többségi játékra láttuk, hogy $C(v) = \emptyset$. Legyen $B = \{(1/2, 1/2, 0), (1/2, 0, 1/2), (0, 1/2, 1/2)\}$, ekkor B stabil halmaz. B független halmaz: Ha pl. $(1/2, 1/2, 0) \succ_S (1/2, 0, 1/2) \Rightarrow S = \{2\}$, de $1/2 \leq v(\{2\}) = 0$ nem teljesül; ellentmondás. A többi eset bizonyítása teljesen hasonló módon történhet. B domináló halmaz: Legyen $x \in A(v)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Ha $x_1 > 1/2$, akkor $x_2, x_3 < 1/2$, de ekkor $(0, 1/2, 1/2) \succ_{\{2,3\}} (x_1, x_2, x_3)$. A szimmetria miatt feltehető, hogy $x_1 \geq \max\{x_2, x_3\}$, így az előző megjegyzés miatt $x_2, x_3 \leq 1/2$. Ha x_2 vagy éppen $x_3 = 1/2$, akkor $x \in B$. Ha viszont mindkettő kisebb, mint $1/2$, akkor $(0, 1/2, 1/2) \succ_{\{2,3\}} (x_1, x_2, x_3)$. Hasonló megfontolással adódik, hogy kontinuum sok stabil halmaz van: minden $c \in (0, 1/2)$ esetén a $B_c := \{(x_1, 1 - c - x_1, c) : 0 \leq x_1 \leq 1 - c\}$ halmaz stabil.

Példa 4. A 2. példában kiszámoltuk az ingatlanfejlesztés játék magját. Bármely n -személyes játékra, ha B egy stabil halmaz, akkor $C(v) \subseteq B$. Itt egy B stabil halmaz feltétlenül bővebb $C(v)$ -nél, hiszen az $x = (100000, 100000, 100000) \in A(v)$ imputációra nem létezik olyan $y \in C(v)$ és $S \subseteq \{1, 2, 3\}$, amelyre $y \succ_S x$. Megmutatjuk, hogy $B := \{(x_1, x_2, x_3) : 100000 \leq x_1 \leq 300000, x_2 = 0, x_3 = 300000 - x_1\}$ egy stabil halmaz. B független: Legyen $x, y \in B$ és $x \succ_S y$. Mivel $x_2 = y_2 = 0$, az $x_1 > y_1$, akkor és csak akkor, ha $x_3 < y_3$, illetve $x_3 > y_3 \Rightarrow x_1 < y_1$. Tehát $S = \{1\}$ vagy $S = \{3\}$, ami lehetetlen.

B domináló: Tegyük fel, hogy egy $y \in B$ -re $y_2 > 0$. Legyen ekkor $x = (x_1, x_2, x_3) := (y_1 + y_2/2, 0, y_3 + y_2/2)$. Nyilvánvalóan $x \in B$ és $x \succ_{\{1,3\}} y$.

Egy stabil halmaz tehát a mag által sugalltól eltérő megoldásokat is megenged. Érdekes tulajdonsága, hogy „osztzkodást” írhat elő egy játékban, amelynek üres a magja (lásd 3. példa). Sajnos nem pusztán a nehezen kiszámíthatóságban hasonlít a magra; 1969-ben Lucas bebizonyította, van olyan játék, melynek nincs stabil halmaza. Egy karakterében különböző megközelítést jelent a *Shapley érték*, amely a játékosok „erejét”, alkupozícióját hivatott modellezni.

7.3. A Shapley érték

A cél egy olyan Φ függvény definiálása, amely minden v karakterisztikus függvénnyel leírt játékhoz hozzárendel egy $\Phi(v) \in \mathbf{R}^n$ vektort. Az i -edik játékos *Shapley értéke* $\Phi_i(v)$, ha $\Phi(v) = (\Phi_1(v), \dots, \Phi_n(v))$ és az alábbi axiómák teljesülnek Φ -re:

1. Legyen π az $I = \{1, \dots, n\}$ halmaz egy permutációja, és $w(S) = v(\pi(S))$ minden $S \subseteq I$ -re. Ekkor $\Phi_i(w) = \Phi_{\pi(i)}(v)$.
2. $\sum_{i=1}^n \Phi_i(v) = v(I)$.
3. Ha $v(S \setminus \{i\}) = v(S)$ minden $S \subseteq I$ -re, akkor $\Phi_i(v) = 0$.
4. Additivitás. Ha v és v' karakterisztikus függvények az I halmazon és $w = v + v'$, akkor $\Phi(w) = \Phi(v) + \Phi(v')$.

Megjegyzés: Az első axióma azt fejezi ki, hogy a játékosok ereje független az elnevezésüktől. A második a Pareto optimalitás analogonja, a megszereshető haszon teljes felosztása. A harmadik szerint nulla az „értéke” annak a játékosnak, akinek lényegében nincs befolyása a játék menetére. Végül a negyedik azt követeli meg, ha két független játékot játszanak ugyanazon játékosok, akkor a nyereményük a két játék összege lesz. Az igazán meglepő, hogy *van*, ráadásul pontosan egy, Φ függvény, amely eleget tesz ezeknek a szigorú feltételeknek.

36. Tétel. (*Shapley*) *A karakterisztikus függvények halmazán létezik egy egyértelműen meghatározott Φ függvény, amely eleget tesz az 1-4 axiómáknak. Továbbá*

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\})),$$

ahol

$$\gamma(k) = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}.$$

Példa 5. (51; 49, 48, 3)

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\})) = \sum_{i \in S, |S|=2} \frac{1}{3!}(1-0) = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3},$$

azaz $\Phi(v) = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Példa 6. Ingatlanfejlesztés

$$\begin{aligned} \Phi_1(v) &= \frac{2!}{3!}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{3!}[(v(\{1, 2\}) - v(\{1\})) + (v(\{1, 3\}) - v(\{1\}))] + \\ &\quad + \frac{2}{3!}(v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\})) = 216666 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Phi_2(v) = \frac{1}{3!}[(v(\{1, 2\}) - v(\{2\})) + \frac{2}{3!}(v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}))] = 16666 \frac{2}{3}$$

$$\Phi_3(v) = \frac{1}{3!}[(v(\{1, 3\}) - v(\{1\})) + \frac{2}{3!}(v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}))] = 66666 \frac{2}{3}$$

Példa 7. ENSZ, Biztonsági Tanács: (39; 7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)

Egy nem állandó i tagra azon S minimális koalíciók esetén nem nulla a $v(S) - v(S \setminus \{i\})$, amelyek mind az öt állandó tagot és pontosan három ideiglenes tagot tartalmaznak az i -edik tagon kívül. Ezek száma $\binom{9}{2}$, míg $\gamma(9) = 8!6!/15!$, azaz

$$\Phi_i(v) = \binom{9}{2} \frac{8!6!}{15!} = \frac{4}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \approx 0,001865$$

Az első és második axióma miatt ha j egy állandó tagja a BT-nek, akkor

$$\Phi_j(v) = \frac{1 - 10\Phi_i(v)}{5} = \frac{1 - \frac{8}{7 \cdot 11 \cdot 13}}{5} \approx 0,1963.$$

Az öt állandó tag birtokolja tehát a döntéshozatal több, mint 98%-át, míg az ideiglenes tagok befolyása a 2%-ot sem éri el.

A Shapley tétel következményei

Az egyszerű játékokra (azaz, melyekben a $v(S) = 0$ vagy 1 minden S koalícióra) a Shapley érték kiszámítása egyszerűsödik.

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\})),$$

és most, $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 1$ pontosan akkor, ha $v(S) = 1$ és $v(S \setminus \{i\}) = 0$ különben. Legyen \mathcal{S}_i ($i \in S \subseteq I$) az i -t tartalmazó nyerő koalíciók halmaza, melyek az i -t elhagyva már nem nyerők. Így

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \in \mathcal{S}_i} \gamma(|S|).$$

Példa 1. ENSZ Biztonsági Tanács

Mint láttuk a döntéshozatal itt egy (39; 7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1) súlyozott többségi játék. Ha i egy nem állandó tag és $S \ni i$ minimális nyerő koalíció, akkor S pontosan 5 állandó és 4 ideiglenes tagból áll. Ezen S halmazok száma $\binom{9}{3}$, így

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \in \mathcal{S}_i} \gamma(|S|) = \sum_{i \in S \in \mathcal{S}_i} \gamma(9) = \binom{9}{3} \gamma(9) = \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13} \approx 0,001865.$$

A szimmetria miatt, ha j egy állandó tag, akkor

$$\Phi_j(v) = \frac{1 - 10\Phi_i(v)}{5} \approx 0,1963,$$

míg az 5 állandó tag egyesített ereje $\approx 0,98153$. A példa mutatja, hogy egy súlyozott többségi játékban a játékosok valódi ereje és a szavazataik száma között messze nem lineáris a kapcsolat, illetve a gyengébb játékosok érdekérvényesítő képessége tragikusan kicsi. Elképzelhető viszont, hogy 7 ideiglenes tag összefog és *mindig* együtt szavaz. Ekkor együttes erejük $1/6$, csak úgy, mint az állandó tagoké ebben az esetben, míg a kimaradó 3 nem állandó tag ereje nulla! A régi tanács, *divide et impera*, matematikailag is alátámasztható.³

Egyszerű játékok esetében elegáns valószínűségi interpretációja adható meg a Shapley értéknek. Egy π permutációjára I -nek egy i elem *pivotális*, ha az i -t π -ben megelőző elemek által vesztes, de i -t hozzávéve győztes koalíciót alkotnak. Ha egy S nyerő, $S \setminus \{i\}$ vesztes koalíció, akkor S -re nézve $(s-1)!(n-s)!$ számú permutációban lesz i pivotális, ahol $s = |S|$.

³Ezért is ideiglenesek a vétőjoggal nem rendelkező tagországok, így valószínűtlen az összefogásuk, illetve könnyebben befolyásolhatók.

37. Tétel. *Egy v karakterisztikus függvényű játékban $\Phi_i(v)$ egyenlő annak a valószínűségével, hogy az i pivotális, amennyiben az I bármely permutációját azonos valószínűséggel választjuk.*

Példa 2. Az ausztrál parlamenti rendszer működése

Az ország hat szövetségi államból áll, és törvényeket ezek képviselői, illetve a szövetségi kormányzat hozza. Az elfogadás feltétele, hogy legalább öt állam, vagy két állam és a szövetségi kormányzat támogassa az adott törvényt. Egy permutációban a szövetségi kormányzat pivotális, ha a harmadik, a negyedik vagy ötödik helyen áll. Ezek egymást kizáró események, valószínűségük $1/7 + 1/7 + 1/7 = 3/7$. Az egyes államok Shapley értéke egyenlő, $4/7 \cdot 1/6 = 2/21$, ami a szövetségi kormányzat erejének két kilencede.

Felmerül a kérdés, mi a Shapley érték és az imputációk kapcsolata.

38. Tétel. *Minden n -személyes játékra a $\Phi(v)$ vektor eleme az imputációk $A(v)$ halmazának.*

Bizonyítás: A 2. axióma szerint $\sum_{i=1}^n \Phi_i(v) = v(I)$, így a Pareto optimalitás teljesül. Az egyéni racionalitás $\Phi_i \geq v(\{i\})$ egyenlőtlenségei a következők miatt állnak. Először is a $v(S) - v(S \setminus \{i\}) \geq v(\{i\})$ a szuperadditivitás miatt. Ezzel

$$\Phi_i(v) \geq \sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|)v(\{i\}) = v(\{i\}) \sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|) = v(\{i\}),$$

hiszen

$$\sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|) = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{k-1} \gamma(|k|) = \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!(k-1)!(n-k)!}{(n-k)!(k-1)!n!} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

□

Összefoglalva az eddigieket, egy n -személyes játék elképzelhető megoldásai (kifizetései) az imputációk $A(v)$ halmaza. Mivel $A(v)$ -t

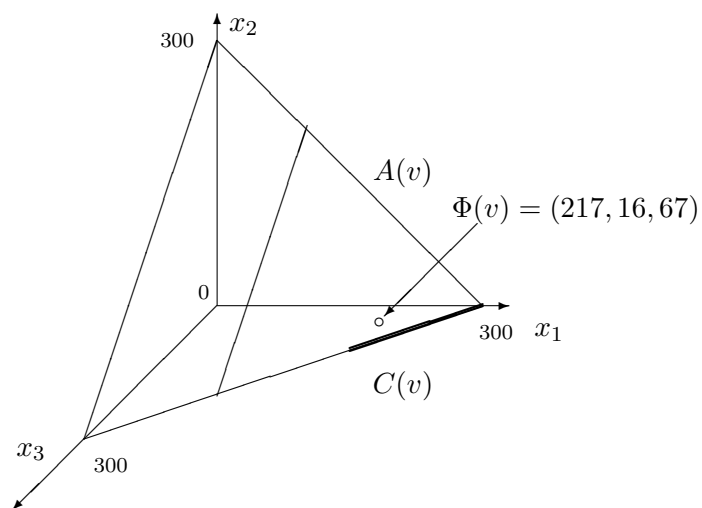
$$\sum_{i=1}^n x_i = v(I) \text{ egyenlet és az } x_i \geq v(\{i\}) \text{ (} i \in I \text{)}$$

egyenlőtlenségek határozzák meg, $A(v)$ egy konvex poliéder. A $C(v)$ meg az $A(v)$ -nek része, és szintén poliéder, hiszen

$$C(v) = \{x \in \mathbf{R}^n : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), S \subseteq I\},$$

míg egy stabil B halmazról tudjuk, hogy $C(v) \subseteq B \subseteq A(v)$. Végül a Shapley érték $\Phi(v)$ vektora szintén $A(v)$ -ben van.

Példa 3. Az ingatlanfejlesztés „megoldásai” (a koordinátákat ezer dollárban mérve).



8. fejezet

Nash program

Nash már 1950-ben felvetette az eltérő játékok egységes kezelésének gondolatát. A cél, hogy egy adott kooperatív játékhoz alkossunk olyan nem kooperatív játékot, amelynek Nash egyensúlya az eredeti játék kívánatos megoldása lesz. A fordított irány is fontos; itt az alku lehetőségét vizsgáljuk. Kezdjük ezzel.

8.0.1. Nash alku megoldás

Adott egy $X \subset \mathbb{R}^2$ korlátos konvex zárt halmaz és $d \in \mathbb{R}^2$. X -re úgy tekintünk, mint a kifizetések lehetséges halmazára, amiben megegyezhet a két játékos, míg a d kifizetést (*status quo* vagy *disagreement point*) akkor kapják, ha nem jutnak dűlőre. Ésszerű feltenni, hogy van olyan $x \in X$, hogy $d < x$ és minden $x \in X$ -re $d \leq x$.¹ A megegyezést egy $F : (X, d) \rightarrow X$ függvénybe kódoljuk, ahol F -re természetes axiómákat teszünk fel:

- (i) Invariáns affin transzformációkra
- (ii) Pareto optimális
- (iii) Független az irreleváns alternatíváktól
- (iv) Szimmetrikus

Az $S = F(X, d)$ pontot Nash alku megoldásnak, röviden NSB-nek (*Nash Bargaining Solution*) nevezzük. Részletezzük az axiómákat. (i) $\tau_{Ab} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ affin transzformáció, azaz $\tau_{Ab}(x) := Ax + b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ és } b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

¹ \mathbb{R}^2 -ben $y < x$ ($y \leq x$) akkor és csak akkor, ha $y_i < x_i$ ($y_i \leq x_i$), $i = 1, 2$ esetén.

Így $F(X, d) = S \Rightarrow F(\tau_{Ab}(X), \tau_{Ab}(d)) = \tau_{Ab}(S)$.

(ii) szerint csak az X jobb-felső határa lehet megoldás, azaz az olyan $(x_1, x_2) \in X$, amelyre nem létezik $(z_1, z_2) \in X$ úgy, hogy $x_i < z_i$, $i = 1, 2$. A (iii) formálisan $F(X, d) = S$, $Y \subset X$, $S \in Y$ és $d \in Y \Rightarrow F(Y, d) = S$. A (iv) szerint ha X szimmetrikus az $x_1 = x_2$ egyenesre, akkor S ezen az egyenesen van.

39. Lemma. (Nash) Tegyük fel, hogy az X határához egy S pontban húzott érintő olyan R és T pontokban metszi a d -ben állított vízszintes és függőleges egyeneseket, melyre $S = (R + T)/2$. Ekkor $S = F(X, d)$, azaz NBS.

Bizonyítás: Legyen $d = (d_1, d_2)$ és S olyan Pareto optimális pont, amelyre $S = (R + T)/2$, továbbá, ha $T = (t_1, t_2)$ és $R = (r_1, r_2)$

$$A = \begin{pmatrix} (t_1 - d_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (r_2 - d_2)^{-1} \end{pmatrix} \text{ és } b = \begin{pmatrix} -d_1/(t_1 - d_1) \\ -d_2/(r_2 - d_2) \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\tau_{Ab}(d) = (0, 0)$, $\tau_{Ab}(R) = (0, 1)$, $\tau_{Ab}(T) = (1, 0)$ és $\tau_{Ab}(S) = (0.5, 0.5)$. Legyen $Y = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq K\}$, ahol K olyan, hogy $\tau_{Ab}(X) \subset Y$. Most a $\tau_{Ab}(S) = F(Y, 0)$ (iv) miatt és mind a $(0, 0)$ és $\tau_{Ab}(S)$ eleme a $\tau_{Ab}(X)$ halmaznak. Így a (iii) axióma szerint $\tau_{Ab}(S) = F(\tau_{Ab}(X), \tau_{Ab}(d))$ és ebből az (i) miatt $S = F(X, d)$. \square

Példa: A fogolydilemmára X egy háromszög, melynek csúcsai $(-1, -1)$, $(-10, 0)$, $(0, -10)$, $d = (-5, -5)$. $S = (-1, -1)$, azaz a paradoxon eltűnik.

40. Tétel. (Nash) Az $F(X, d)$ az egyértelmű megoldása a $\max(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$, $(x_1, x_2) \in X$ feladatnak.

Bizonyítás: A d origóba tolásával feltehetjük, hogy $d = (0, 0)$ és a célfüggvény x_1x_2 . Utánna a megfelelő A mátrixú $\tau_A := \tau_{A(0,0)}$ affín transzformációval elérhető, hogy a feladat egyértelmű² S optimum pontja az $(1, 1)$ pontba kerüljön. Ha az X halmaz képe a $x_2 = 2 - x_1$ egyenes alatt marad, akkor a 39. lemma miatt az $(1, 1) = F(\tau_{Ab}(X), 0)$, így (i) miatt $S = F(X, d)$. Tegyük fel, hogy van olyan $(x'_1, x'_2) \in \tau_{Ab}(X)$, mely a $x_2 = 2 - x_1$ egyenes fölött van, feltehető, hogy $x'_1 < 1$. Ekkor az $m < -1$ meredekségű, az $I = [(1, 1), (x'_1, x'_2)]$ szakasz része $\tau_{Ab}(X)$ -nek és van olyan $(x_1^*, x_2^*) \in I$, amire $x_1^*x_2^* > 1$. Ez viszont ellenmond S optimalitásának, hiszen a τ_A hiperbolát hiperbolába visz és monoton az x_1x_2 szorzatra. \square

² X konvex, korlátos és zárt.

8.0.2. Kalai-Smorodinsky alku megoldás

A Nash alku megoldás egyik gyengesége, hogy a gyakorlatban általában a több lehetőség hasznosabb.³ Legyen $X_1 = \text{conv}\{(1, 0), (0, 1), (3/4, 3/4)\}$ ill. $X_2 = \text{conv}\{(1, 0), (0, 1), (1, 0.7)\}$, ahol $\text{conv}\{L\}$ az L halmaz konvex burka.

Ekkor $F(X_1, (0, 0)) = (3/4, 3/4)$, míg $F(X_2, (0, 0)) = (0.7, 0.7) = 0.7$, és a második játékos vélhetőleg nehezen érti meg, miért csökken a kifizetése a 2. játékban?

Kalai és Smorodinsky a (iii) függetlenségi axiómát az (iii)', ún. monotonitási axiómára cseréli. Vezessük be ehhez az $a(X) = (a_1, a_2)$ *utópia pontot*, melyre $a_1(X) = \max\{x_1 : (x_1, x_2) \in X\}$ és $a_2(X) = \max\{x_2 : (x_1, x_2) \in X\}$. Továbbá affin transzformációval minden feladat normált alakra hozható, azaz $d = (0, 0)$ és $a(X) = (1, 1)$.

(iii)' Ha $X_1 \subset X_2$ és (X_i, d) normált $i = 1, 2$ -re és $a(X_1) = a(X_2)$, akkor $F(X_1, d) \leq F(X_2, d)$. Az F függvény Kalai-Smorodinsky alku megoldás (KSBS), ha az (i), (ii), (iii)' és (iv) axiómáknak eleget tesz. Jelentse $L(q, r)$ a q és r pontok által meghatározott egyenest.

41. Tétel. *Pontosan egy Kalai-Smorodinsky alku megoldás van. Ez megoldás éppen az $X \cap L(d, a(X))$ legnagyobb pontja az \mathbb{R}^2 -beli $<$ rendezés szerint.*

Bizonyítás: A $X \cap L(d, a(X)) \neq \emptyset$, hisz $d < a(X)$ és vannak olyan $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, hogy $P_1 = (x_1, a_2(X)) \in X$ és $P_2 = (a_1(X), y_1) \in X$. X konvexitása miatt $L(P_1, P_2) \subset X$ és $|L(P_1, P_2) \cap L(d, a(X))| = 1$. Tehát $X \cap L(d, a(X))$ egy zárt szakasz, amin a $<$ rendezésnek egyértelmű maximuma van.

Ez a maximum pont, $\mu(X, d)$, triviálisan teljesíti az (i), (ii) és (iii)' axiómákat, míg a (iv) azért következik, mert az affin leképezések a definiáló szakaszt szakaszba viszik és megtartják a rendezést.

Az egyértelműséget elég normált feladatokra belátni. Legyen F egy KSBS és $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ és } \exists y \in X, x \leq y\}$. Ekkor $(X_1, 0)$ is normált, $X \subset X_1$ és az (iii)' csak úgy teljesülhet, ha $F(X, 0) = F(X_1, 0)$. Vegyük észre, hogy $(1, 0), (0, 1) \in X_1$ és legyen $X_2 = \text{conv}\{(1, 0), (0, 1), \mu(X_1, 0)\}$. Ekkor az $(X_2, 0)$ normált, szimmetrikus és $X_2 \subset X_1$. A monotonitás miatt $\mu(X_1, 0) = F(X, 0) \leq F(X_1, 0)$, de ez csak egyenlőséggel teljesülhet, hisz nincs X_1 -nek a $\mu(X_1, 0)$ -nál nagyobb pontja. \square

Megjegyzés: Más feltételekkel Raiffa korábban (1957) javasolta ezt a megoldást, és Crott 1971-ben kísérleti úton talált rá megerősítést.

³Bár láttunk rá példát, hogy néha épp ellenkezőleg van ez.

8.0.3. A NBS részjáték tökéletes egyensúlyként.

A Nash program szerint adnunk kell egy olyan nem kooperatív játékot, amelynek a Nash egyensúlya megfelel az alkunak. Ezt a korábban megismert szimmetrikus váltott ajánlat játékok egy sorozatával valósíthatjuk meg. Az u_1 és u_2 utilitásfüggvényeket úgy definiáljuk, hogy az X halmaz Pareto határának egy paraméterezése legyen az $[0, 1]$ intervallum, és az $x \in [0, 1]$ esetén adódó határpont $(u_1(x), u_2(1 - x)) \in \mathbb{R}^2$.

42. Tétel. *A NBS a szimmetrikus váltott ajánlat játékok részjáték tökéletes egyensúlyainak határértéke, ha δ tart az egyhez.*

Bizonyítás: A 40. tételt használjuk, amely alapján az NBS a Nash szorzat, azaz a $g(x) = (x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$ függvény maximum helye az X halmazon. Legyen x^*, y^* a váltott ajánlat játék egyensúlya. Ekkor

$$\delta_1^t u_1(x^*) = u_1(y^*) \quad \text{és} \quad \delta_2^t u_2(y^*) = u_2(x^*).$$

Így

$$g(x^*) = u_1(x^*)u_2(x^*) = u_1(x^*)\delta u_2(y^*) = u_1(y^*)u_2(y^*) = g(y^*).$$

Azaz valamely $c \in \mathbb{R}$ konstansra a $g(x) = c$ hiperbola átmegy mind az x^* , mind az y^* pontokon, pontosabban a Pareto határ ezekkel paraméterezett pontjain. Ha $\delta \rightarrow 1$, akkor $|x^* - y^*| \rightarrow 0$, azaz a hiperbola éppen érinteni fogja az X halmazt. Ekkor viszont az $x^* = y^*$ határérték maximalizálja a g függvényt, ami a NBS pontot jelenti. \square

Stabil Párosítások

A stabil párosítás vagy stabil házasság probléma kiváló példa mind a gyakorlat és elmélet viszonyának szemléltetésére, mind a mohó algoritmus egy újabb illusztrációjára. A problémakört eredetileg az USA-ban a 40-es évek közepén kulmináló orvos gyakornok hiány, illetve elosztási zavar motiválta. A végzős orvosok ezreit kellett a kórházak által meghirdetett helyekre beosztani; ráadásul mindkét fél (orvos vs. kórház) a saját preferenciáit igyekezett érvényesíteni. Az eredetileg alkalmazott technikák teljesen alkalmatlanná váltak 1947-re, mikoris egy radikálisan új rendszert vezettek be helyettük. Érdekes módon ennek elméleti vizsgálatát csak 1962-ben tette meg D. Gale és L. S. Shapley, s igazából ők nem tudtak a problémáról: az egyetemi felvételi rendszert illetve a házasságok stabilitását akarták modellezni.⁴

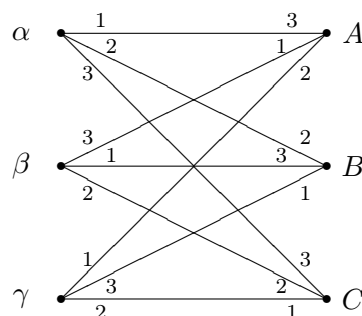
Mi az általuk vizsgált legegyszerűbb modellt ismertetjük, utalva rá, hogy igen sok általánosítás született azóta. A stabil házasság problémában adott n férfi, n nő

⁴Néhány éve a magyar felsőoktatási felvételi rendszere is hasonló algoritmust használ.

és mindegyikük valahogyan rangsorolja az ellentétes nem tagjait; ez az illető személy *preferencia listája*. A férfiakat görög, a nőket latin betűkkel jelöljük majd. Így például akkor mondjuk, hogy az α (férfi) *jobban kedveli* vagy *preferálja* A -t B -hez képest, ha α preferencia listáján A előrébb van, mint B . A személyeket és preferenciáikat leírhatjuk (duplán) súlyozott páros gráfokkal, vagy mátrixokkal is az alábbiaknak megfelelően:

Példa:

	A	B	C
α	1, 3	2, 2	3, 1
β	3, 1	1, 3	2, 2
γ	2, 2	3, 1	1, 3



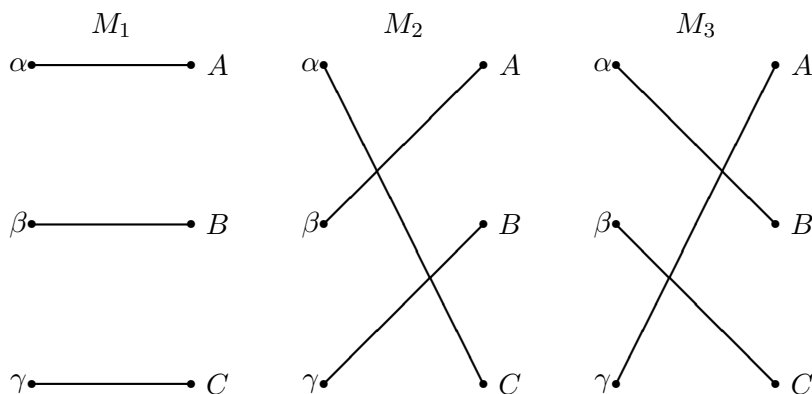
A mátrix egy elemének első koordinátája a megfelelő oszlop által reprezentált nő helyezése a sorhoz tartozó férfi ranglistáján, míg a második koordináta a fordított helyezés.

A feladat egy olyan n -elemű M párosítás megadása, amely, legalábbis valamely értelemben, elképzelhető. Gyakorlati és elméleti megfontolások alapján az alábbi definíció tűnik ésszerűnek:

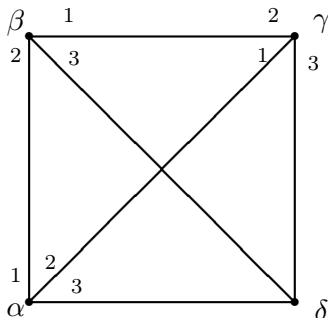
13. Definíció. Egy M párosítás **instabil** ha vannak olyan α, β férfiak és A, B nők, hogy $(\alpha, A) \in M$, $(\beta, B) \in M$, de β preferálja A -t B -hez képest, és A preferálja β -t α -hoz képest. Egy M párosítás **stabil**, ha nem instabil.

A definíció motivációja kézenfekvő: feltehető, hogy az instabil esetben β illetve A felbontja pillanatnyi kapcsolatát, és egymással lép kapcsolatba. A célunk egy stabil M párosítás keresése lesz majd, már ha van ilyen egyáltalán. (A korábban említett Halmos-Vaughan modell globális optimumra törekedett, nem véve figyelembe a lokális érdekeket, lehetőségeket. Ezért legfeljebb kikényszeríthető, míg a fenti stabilitás szerint egy M teljes párosítás nem bomlik fel, ha magára hagyjuk a rendszert.)

Kérdés persze, van-e egyáltalán megoldás? A fenti példában három megoldás van: $M_1 = \{(\alpha, A), (\beta, B), (\gamma, C)\}$, $M_2 = \{(\alpha, C), (\beta, A), (\gamma, B)\}$ és $M_3 = \{(\alpha, B), (\beta, C), (\gamma, A)\}$.



Példa: A stabil házasság mintája alapján definiálhatjuk az ún. *szobatárs* problémát. Itt adott $2n$ ember, akiket kétszemélyes szobákba kell telepíteni és az előzőekhez hasonlóan preferenciákkal rendelkeznek. Nyilvánvaló, ha adott négy személy ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) úgy, hogy α, β és γ preferencia listáján δ az utolsó, α -én β , β -én γ és γ -én α az első, akkor *nincs* stabil párosítás.



A példa fényében kellemes meglepetés az alábbi tétel.

43. Tétel. (Gale-Shapley) *A stabil házasság problémának mindig van megoldása.*

Bizonyítás: Valójában egy nagyon hatékony, mohó típusú algoritmust adunk, melynek végeredménye bizonyosan stabil párosítás. Tradicionálisan, hisz ez igencsak tradicionális eljárás, a megfelelő köznap kifejezéseket használjuk a leírás során.

A eljárás első lépésében minden férfi ajánlatot tesz a kedvencének. Minden nő a legjobb ajánlatot fogadja el, de ez csak annyit jelent, hogy „várakozó listára” helyezi a kérésőt. A második lépésben az elutasított kérésők újra ajánlatot tesznek, ezúttal a preferencia listájukon 2. helyezett hölgynek. A nők ismét a pillanatnyilag legjobb ajánlatot fogadják el; esetlegesen lecserélve a várakozó listán lévő kérésőt. Hasonlóan folytatódik ez a későbbiekben is: egy elutasított (vagy egy várakozó listáról lekerült)

férfi a soron következő jelölttel próbálkozik, míg a nők a lehető legjobb jelöltet tartják meg.

Legkésőbb $n^2 - 2n + 2$ lépés elteltével minden hölgy kap legalább egy kérést, így a várakozó listáján is lesz majd valaki. (Ugyanis ha egy lépésben van olyan nő, aki nem kapott még ajánlatot, akkor lennie kell elutasításnak is ebben a lépésben, illetve egy férfi csak egyszer tesz ajánlatot egy nőnek.)

Mikor minden nő kapott ajánlatot, akkor véget vetünk az eljárásnak, és a pillanatnyi párokat véglegesnek kiáltjuk ki. Megmutatjuk, hogy az így kapott M párosítás stabil. Tegyük fel, hogy van olyan α és A , melyre $(\alpha, A) \notin M$, de α preferálja a párjához képest. Ekkor viszont α valamikor ajánlatot tett A -nak és A elutasította őt, azaz a várakozó listáján α -nál „jobb” személy volt, s ha cserélődött is azóta, csak még jobb lehet később. Így A a párját jobban kedveli, mint α -t, azaz nincs instabilitás. \square

Példa:

	A	B	C	D
α	1, 3	2, 3	3, 2	4, 3
β	1, 4	4, 1	3, 3	2, 2
γ	2, 2	1, 4	3, 4	4, 1
δ	4, 1	2, 2	3, 0	1, 4

Az algoritmus végrehajtását egy táblázaton követhetjük. Egy cella baloldali eleme az adott lépésben a sor által kódolt személytől ajánlatot kapó, a jobboldali elem pedig a sor ajánlatát elfogadott személy.

	1. lépés	2. lépés	3. lépés	4. lépés	5. lépés	6. lépés
α	A, A	\emptyset, A	\emptyset, A	\emptyset, \emptyset	B, \emptyset	C, C
β	A, \emptyset	D, D	\emptyset, D	\emptyset, D	\emptyset, D	\emptyset, D
γ	B, B	\emptyset, B	\emptyset, \emptyset	A, A	\emptyset, A	\emptyset, A
δ	D, D	\emptyset, \emptyset	B, B	\emptyset, B	\emptyset, B	\emptyset, B

A követhetőség kedvéért felvettük a férfiak preferencia listáit, ahol felülvonással jeleztük, ha már történt ajánlat:

$$\alpha(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D)$$

$$\beta(\bar{A}, \bar{D}, C, B)$$

$$\gamma(\bar{B}, \bar{A}, C, D)$$

$$\delta(\bar{D}, \bar{B}, C, A)$$

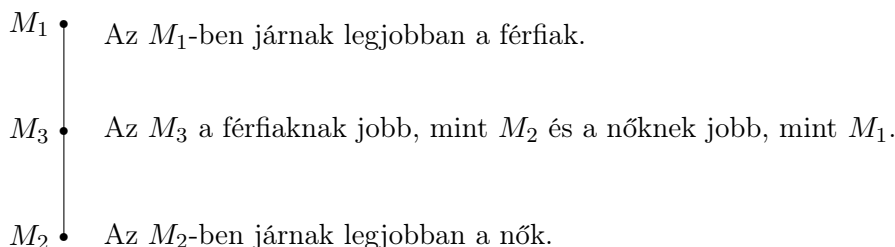
A megoldást az utolsó oszlop jobboldaláról olvashatjuk le:

$$M = \{(\alpha, C), (\beta, D), (\gamma, A), (\delta, B)\}.$$

Felmerül a kérdés, tudunk-e valami közelebbit mondani a stabil párosítások szerkezetéről, összehasonlíthatók-e stb. Vegyünk két stabil párosítást, M_1 -et és M_2 -öt. Az M_1 férfi szempontból jobb, mint M_2 , ha minden férfi legalább olyan jó párt kap M_1 -ben, mint M_2 -ben; jelölésben $M_1 \geq_F M_2$. Nem lehet bármely két stabil párosítást összehasonlítani, de az összes stabil párosítás, mint azt J. H. Conway megmutatta, ún. *disztributív* vagy más szóval *geometriai hálót* alkot.⁵

Speciálisan van legnagyobb és legkisebb eleme. (Ha a nők szempontjából nézzük, ugyanazt a hálót kapjuk, csak megfordítva. Azaz ami az egyik nemnek a legjobb, a másoknak a legrosszabb.) Ez utóbbit egyszerűen beláthatjuk.

Példa: Az első példában szereplő stabil párosítások az alábbi hálót alkotják:



Egy A hölgy *lehetséges* az α férfi számára, ha van olyan M stabil párosítás, amelyre $(\alpha, A) \in M$.

44. Tétel. *Az előző algoritmus minden férfinak a legjobb lehetséges párt adja, míg minden nőnek a legrosszabbat.*

Bizonyítás: Az első állítást a lépések szerinti indukcióval látjuk be. Tegyük fel, hogy a soron következő lépésig egyetlen férfit sem utasított el olyan nő, aki lehetséges lett volna számára. Tegyük fel továbbá, hogy ebben a lépésben A elutasítja α -t. Azt állítjuk, hogy ekkor A nem lehetséges α számára. Valóban, ha A pillanatnyi párja β , akkor β preferálja A -t az összes nőhöz képest, kivéve akik korábban visszautasították. Ezek azonban, az indukciós feltétel miatt, nem lehetségesek β számára. Ha tehát létezne egy olyan M stabil párosítás, amelyre $(\alpha, A) \in M$, ebben β a párját (nevezzük B -nek) kevésbé kedvelné, mint A -t, hiszen mind A és B lehetséges β számára. Ekkor viszont az (α, A) , (β, B) instabilitást okoz, azaz A nem lehetséges α számára, s ezzel beláttuk a tétel első felét.

⁵Egy L háló, ha van két kétváltozós művelete, \vee és \wedge , és ezek *idempotensek* $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$, *kommutatívak*, $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$, *asszociatívak*, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ és *elnyelők*, azaz $x \vee (x \wedge y) = x$ és $x \wedge (x \vee y) = x$ minden $x, y, z \in L$ esetén. *Disztributív* a háló, ha teljesül még az $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ egyenlőség is.

Legyen M^* az algoritmusunk által adott *férfi optimális* megoldása, M pedig egy tetszőleges stabil párosítás. Belátjuk, hogy bármely A nő esetén az ő M -beli párja nem rosszabb, mint az M^* -beli párja. (Igazából pontosan akkor nem rosszabb, ha ugyanaz a párja a két párosításban, és határozottan jobb, ha nem.) Ha $(\alpha, A) \in M^*$, $(\beta, A) \in M$ és $\alpha \neq \beta$, akkor $(\alpha, B) \in M$ valamely $B \neq A$ hölgyre. A tétel első fele miatt persze α preferálja A -t B -hez képest. Másrészt az M párosítás stabil, így speciálisan az (α, B) , (β, A) párok stabilitása az jelenti, hogy A preferálja β -t α -hoz képest; s pont ezt akartuk bizonyítani. \square

Megjegyzések: Az algoritmus eredeti felhasználásánál a kórházak tették az ajánlatokat, és azt hangoztatták (természetesen bizonyítás nélkül), hogy ez az orvosok javára válik. Számos tanulság vonható itt le, s ezekből csak az egyik, hogy nem árt meggondolni nyilvánvalónak tűnő (vagy annak beállított) állításokat, mint azt Gale és Shapley tették volt.

A másik, hasonlóan fontos észrevétel a döntési helyzetek illetve stratégiák buktatóira vonatkozik. A modell azt sugallja, „előbe kell menni” az eseményeknek és kishitűség nélkül megpróbálni a legjobbnak tűnő megoldásokat a „sült galambra várás” helyett.

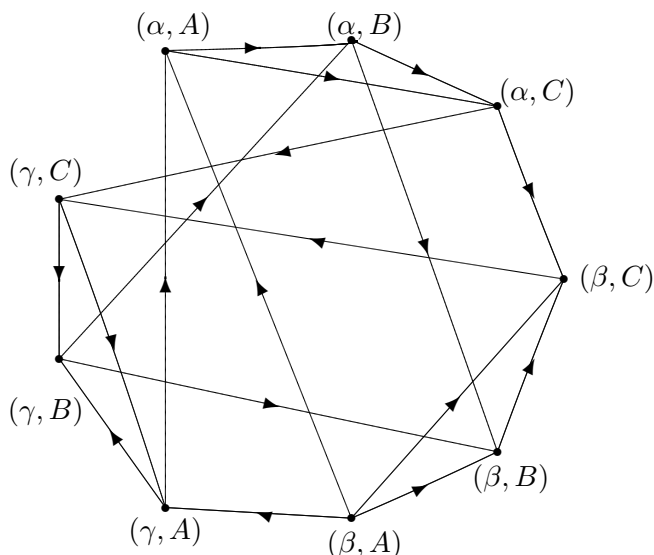
A stabil párosítás mint mag

Korábban definiáltuk egy irányított G gráf magját; ez egy olyan $S \subset V(G)$ halmaz volt, amely független és domináló egyben. Ez a fogalom különösen fontos a játékelméletben, hisz a megoldások stabilitását fogalmazza meg matematikai formában. A stabil párosítás motiválhatja ezt a definíciót, ugyanis egy rögzített probléma stabil párosításai tulajdonképpen magok egy megfelelően alkotott gráfban.

Definiáljuk egy G gráf *vonalgáfját*, $L(G)$ -t, a következőképpen: $L(G)$ pontjai G élei lesznek, azaz $V(L(G)) := E(G)$, és $L(G)$ két pontja, e és f , között van él, ha G -ben tekintve az e és f éleknek van közös pontja. Ha G pontjaihoz preferencia listák vannak rendelve, irányítsuk az (e, f) élt $L(G)$ -ben úgy, hogy az a preferált pontból indul és a kevésbé kedvelt pontra mutat közös ponthoz tartozó lista szerint.

Állítás: A fenti definíciókkal a G gráf stabil párosításai éppen az $L(G)$ gráf magjainak felelnek meg.

Példa: Az első példa G gráfjához tartozó $L(G)$:



Csoportok döntéshozatala

Az életben gyakran felmerül, hogy emberek egy csoportjának egy probléma megoldásának különböző alternatíváit sorba kell rendeznie.

Példa 1. Egy család autót vásárol, és a kereskedő a következő extrákat ajánlja: blokkolásgátló (ABS), légszák (L), légkondicionáló (AC) és sztereo rádió (S). Mivel mindet nem engedhetik meg maguknak, mindenki egy fontossági listát állít fel.

férj feleség 1. gyerek 2. gyerek

ABS	AC	S	AC
AC	L	AC	L
S	S	L	ABS-S
L	ABS	ABS	

A kérdés ezek után: mi legyen a közös sorrend? (Az ABS-S jelöléssel az érzékel-tetjük, hogy megengedjük a döntetlent két alternatíva összehasonlításánál.)

Általánosan: Adott egy t elemű I halmaz (az egyének csoportja) és egy A , az alternatívák halmaza. Jelölje P az A sorrendjeinek (döntetlent megengedve) a halmazát, ekkor $P \times \dots \times P = P^t$ a lehetséges inputok tere, elemei az ún. *profilok*, jelük (P_1, \dots, P_t) . Egy $F : P^t \rightarrow P$ függvényt *konszenzus függvénynek* (social welfare function) hívunk. A célunk természetesen a valamely szempontból ésszerű konszenzus függvények vizsgálata.

Példa 1. Az egyszerű többség szabálya

Az $a, b \in A$ alternatívákra a csoport a -t b felé helyezi, ha az egyének többsége ezt tette. Sajnos ez a szabály *nem* vezet konszenzus függvényhez, mint azt az alábbi ún. *szavazói* vagy *Condorcet* paradoxon mutatja.

Legyen $I = \{1, 2, 3\}$, $A = \{a, b, c\}$.

P_1	P_2	P_3
a	b	c
b	c	a
c	a	b

A szabály szerint a megelőzi b -t, b megelőzi c -t és c megelőzi a -t, ami a rendezés tranzitivitása miatt nem lehetséges.

Példa 2. Borda érték

Egy $(P_1, \dots, P_t) \in P^t$ -re és $a \in A$ -ra definiáljuk a $b_i(a)$ értéket ($b_i : A \rightarrow \mathbf{N}$ függvény) az alábbi formulával: $b_i(a) := P_i$ -ben az a mögé helyezett alternatívák száma. A Borda érték pedig $b(a) := \sum_{i=1}^t b_i(a)$, és a csoport x -et y elé helyezi, ha $b(x) > b(y)$. Így valóban adódik egy konszenzus függvény; tulajdonképpen pl. a pontozásra alapuló sportágakban hasonló történik. Egy súlyos ellenvetés a módszer ellen az alábbi profil kiértékelése:

P_1	P_2	\dots	P_{t-1}	P_t
x	x		x	y
y	y		y	\vdots
\vdots	\vdots		\vdots	x

Nyilvánvalóan $b(y) - b(x) = |A| - 1 - (t - 1) = |A| - t$, azaz ha az alternatívák száma nagyobb, mint a csoport mérete, akkor az y alternatívát a csoport x elé helyezi. Így az értékelés, ha más nem, nagyon érzékeny a hibákra, elfogultságokra, esetlegesen manipulációkra.

Példa 3. Lexikografikus rendezés

Helyezzük $x \in A$ -t $y \in A$ elé, ha P_1 -ben x megelőzi y -t. Ha P_1 -ben x és y esetleg azonos helyen van, nézzük P_2 -t és így tovább. Ez nyilvánvalóan konszenzus függvény, s így matematikai szempontból semmi baj sincs vele. A szó köznapi értelmében persze szó sincs konszenzusról, az egyes játékos *diktátor*.

Nem könnyű tehát minden igénynek elegendő konszenzus függvényt találni. Hasonló megközelítést alkalmazunk, mint a Shapley érték definíciójánál; megpróbá-

lunk axiómákat adni egy megfelelő konszenzus függvényre. Az alábbi axiómákat 1951-ben Arrow fogalmazta meg.⁶

Arrow axiómák

1. "Egyetértés." Ha a megelőzi b -t minden profilban, akkor az ezt teszi $F(P^t)$ -ben is.
2. "Függetlenség az irreveláns alternatívától." Legyen A_1 egy tetszőleges részhalmaza az alternatíváknak. Ha egy profilt úgy módosítunk, hogy minden egyén sorrendje az A_1 elemei között változatlan, akkor a konszenzus függvény ugyanazt a sorrendet adja A_1 elemei között az eredeti és a módosított profil esetében.
3. "Nincs diktátor" Nincs olyan egyén, aki ha a -t b elé helyezi, akkor a konszenzus függvény is ezt teszi, függetlenül a többi egyén értékelésétől.

Az Arrow axiómák az igazságosságot és az ésszerűséget próbálják megragadni. Ezért aztán eléggé meglepő és némileg talán kiábrándító a következő tétel.

45. Tétel. (Arrow) *Ha $t > 1$ és $|A| > 2$, akkor nem létezik az 1-3 axiómáknak eleget tevő konszenzus függvény.*

Bizonyítás: Feltesszük, hogy a konszenzus kielégíti az első és a második axiómát, majd belátjuk ekkor van egy diktátor. Legyenek a és b tetszőleges alternatívák. Az " a megelőzi b -t" kifejezést rövidítsük $a > b$ -nek, míg az $a \geq b$ jelentse azt, hogy a *nincs hátrébb, mint b .*

Először az mutatjuk meg, ha egy profilban minden szavazónál első *vagy* utolsó helyen van b , akkor a konszenzusban is első vagy utolsó lesz.⁷ Tegyük fel, hogy ez nem így van és léteznek a és c alternatívák, melyekre $a \geq b$ és $b \geq c$. A 2. axióma miatt ez marad a helyzet akkor is, ha minden profilban előrébb tesszük c -t a -nál. (Persze, hisz b szélső helyzete miatt nem érintjük az ab illetve cb viszonyt.) Mivel a rendezésünk tranzitív, $a \geq c$, ugyanakkor az első axióma szerint $c > a$, ellentmondás.

Megmutatjuk, hogy van egy n^* szavazó, aki extrémén pivotális abban az értelemben, ha megváltoztatja a hozzá tartozó profilt, akkor b -t a konszenzus aljáról a tetejére röppítheti. Vegyük az a helyzetet, mikor mindenki utolsó helyre teszi b -t (a többiekre vonatkozó döntése bármilyen). Az első axióma miatt a konszenzusban is utolsó lesz b .

⁶Arrow axiómáinak sokféle egyenértékű leírása van, itt az egyik legkézenfekvőbbet közöljük.

⁷Azaz a sorrendek egyik részében, mondjuk a felében első, a maradékban utolsó. Tehát a b elemet az extrém értékelése bizonyosan extrém helyre sorolja.

Változtassuk meg egyenként a sorrendeket az utolsóról az első helyre téve b -t! Legyen n^* az első szavazó, amelynek sorrendjének váltása az élre helyezi b -t a konszenzusban is. (Ilyen van, mert az első axióma miatt legkésőbb a végén be kell ennek következnie.) Jelöljük P_1 -gyel az utolsó profilt, amely még a b alternatíva utolsó helyét eredményezi, P_2 pedig a következő, amelyre a konszenzus fentiek miatt már első helyre teszi b -t.

Állítjuk, hogy az n^* szavazó diktátor az olyan ac párokra, ahol sem a sem c nem b . (Vagyis az ilyen ac párok egymáshoz való elhelyezkedése a konszenzusban csak n^* sorrendjétől függ.) Vegyük az ac pár azon elemét (mondjuk a -t) alyik előrébb van n^* sorrendjében. Tekintsünk egy P_3 új profilt, amelyet a P_2 -ből nyerünk az a -t b elé mozgatva az n^* sorrendjében, az összes többi sorrendet pedig rendezzük át tetszőlegesen, de meghagyva b extrémális (első vagy utolsó) helyen. A 2. axióma miatt a P_3 -ra alkalmazott konszenzus $a > b$ -t ad, hiszen a és b helye egymáshoz képest ugyanaz, mint P_1 -ben, amelyre a konszenzus b -t utolsó helyre, azaz a mögé teszi. Hasonlóan $b > c$ a P_3 mellett, hisz a b és c relatív elhelyezése megegyezik a P_2 -ben levővel. A rendezés tranzitivitása miatt $a > c$, tehát tényleg csak n^* sorrendjén múlik az a és c konszenzusbeli sorrendje.

Végül be kell látnunk, hogy n^* diktátor bármely ab párra. Ismételjük meg a fenti gondolatmenetet a b helyére egy c , a -tól és b -től különböző elemet téve. Azt kapjuk, van egy n_c szavazó, akiknek diktátor minden $\alpha\beta$ párra, amire $c \notin \{\alpha, \beta\}$. Speciálisan ilyenek az ab párok, tehát ezek konszenzusbeli sorrendjére csak n_c lehet hatással. Viszont a P_1 és P_2 esetében láttuk, hogy n^* is befolyásolja az ab párt, így csak a $n^* = n_c$ lehetőség marad. \square

Megjegyzések: Arrow tétele rávilágít döntéshelyzetek bizonyos csapdáira. Egyik gyakran megvalósuló megoldás a diktátor, egy másik meg a választási lehetőségek szűkítése kettőre, rosszabb esetben *egyre*. A harmadik pedig, hogy felkészülünk a csapdákra, és megpróbáljuk feloldani a problémát minimális igazságtalanság árán.

8.1. Igazságos osztozkodások

Felmerül az olyan osztozkodás amelyben az a cél, legalábbis nyilvánosan, hogy mindenki egyformán jól járjon. Adott egy kupac aranypor, ezen szeretne osztozni két aranyásó azzal a feltétellel, hogy egyforma rész illeti meg őket, és a másik hibája miatt nem kaphatnak kevesebbet. Két játékos esetén egy nagyon régi ötlet, az *aranyásó* algoritmus megoldja ezt: az egyik kettéosztja a kupacot, a másik választ belőle.

Általánosítások. Felmerül, hogy $n \leq 2$ ember osztozkodását is megoldjuk. A másik irány, hogy minden ember irigy is, és nemcsak $1/n$ -ed részt akar, de azt is, hogy az

övé legyen a legnagyobb darab. Az is fontos, hogy az eljárás, amellyel ezeket a célokat eléri, minél egyszerűbb legyen. A felosztandó kupac pedig egy C korlátos, mérhető halmaz, amin adottak a μ_i , Lebesgue abszolút folytonos mértékek és $\mu_i(C) = 1$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ -re.

Mozgó kés. A legegyszerűbb a holland aukcióhoz hasonló eljárás: húzzunk egy kést C fölött balról jobbra, és mikor valamelyik játékos úgy úgy véli, hogy a baloldali rész elérte az $1/n$ -et, kiáltson fel, elviheti azt és kiszáll a játékból. A maradékra alkalmazzunk rekurzívan ugyanezt az eljárást.

Csökkentés. Állítsuk sorba a játékosokat, és az első vágjon le egy H , szerinte $1/n$ mértékű darabot. Ezután kérdezzük meg a másodikat, hogy a levágott darab szerinte nagyobb-e $1/n$ -nél. Ha nem, akkor nem lesz kifogása, hogy az első legyen, ha igen, akkor vágjon annyit, amennyivel több, azt tegye vissza a $C \setminus H$ -hoz, és innen az övé lesz H maradéka. A eljárást folytatjuk a soron következőkkel, kihasználva azt, hogy a már megszólaltatott játékosok szerint a továbbadott maradék mértéke nem haladja meg az $1/n$ -et. A részhalmaz utoljára vágó játékosé lesz, ő kiszáll, a többiek pedig folytatják ugyanígy.

Irigységmentes elosztás 3 személy esetén. Az aranyásó algoritmus nemcsak igazságos de irigységmentes elosztás is. John Selfridge és John H. Conway 1960-ban megoldotta ezt $n = 3$ -ra; lásd alább. Az $n > 3$ esetek nem egyszerűek, nincs bizonyítva még az sem, hogy korlátos lépésben megoldhatóak. Legyenek a játékosok A, B és C , és amikor egy játékos cselekszik akkor a saját mértékét követi.

Conway-Selfridge algoritmus, az $n = 3$ esetre.

1. Először A vágja három egyenlő részre a halmazt.
2. B levág a legnagyobb részből annyit, hogy két egyforma legnagyobb legyen. A levágott részen később osztoznak.
3. C választ egy darabot, majd B és A viszi az utolsót. Ha C nem vitte el a B által megvágott darabot, akkor B -nek kell ezt választania. Hívjuk V -nek, amelyiküké a vágott darab, a másik (B vagy C) legyen NV .
4. A 2. pontban levágott darabot ossza el NV három egyenlő részre.
5. A játékosok elviszik a felvágott maradékot ebben a sorban: V , A és NV .

46. Tétel. *A Conway-Selfridge algoritmus irigységmentes elosztást ad.*

Bizonyítás: Világos, hogy A nem irigy V -re, hisz még akkor sem lenne, ha V kapja meg az összes, a 2. pontban levágott részt. NV -re sem, hisz a 3. pontban vele egyforma darabot kapott, az 5. pontban pedig megelőzi a választásban. A V szintén

nem irigykedhet; a 3. pontban az egyik legnagyobbat kapta, a levágott részből meg ő vesz előként. Az NV szintén egy legnagyobbat kap a 3. pontban, a 4. pontban pedig ő oszthatja egyenlő részekre a maradékot. \square

Mielőtt rátérnénk az n -személyes irigység mentes elosztásra, olyan elosztást vizsgálunk, ahol a vágások számát szeretnénk korlátozni.

Nyaklác probléma. Két tolvaj akar megosztani egy nyitható nyakláccon, amelyen n fajta drágakő van. Az i -edikből kőből $2a_i$ darab, melyet fele-fele arányban kell osztani, hisz nehezen összehasonlíthatóak a nem azonos típusú kövek. Mivel a lánc maga is értékes, ezt a lehető legkevesebb vágással szeretnék elérni. Ha az azonos kövek egymás mellett vannak, akkor legalább n vágás kell. West és Alon megmutatta, hogy ez a legrosszabb eset.

47. Tétel. *A nyaklác probléma mindig megoldható n vágással.*

Bizonyítás: Áttérünk a folytonos problémára. Vegyük az $I = [0, 1]$ egység intervallumot, ahol a pontok az $\{1, \dots, n\}$ számok egyikével vannak színezve és az egyszínű pontok halmaza mérhető. Egy $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_r < y_{r+1} = 1$ sorozat r méretű kettéosztás ha $\cup\{[y_i, y_i] : i \equiv 0 \pmod{2}\}$ ha minden színhalmaz felét tartalmazza. A nyaklác kövei indukálják I színezését egy skálázással. Egy lemmával kezdjük.

48. Lemma. *A színezett I intervallumnak van legfeljebb n méretű kettéosztása.*

Bizonyítás: (48. lemma) Szükségünk van egy mély topológiai eredményre, amit Borsuk és Ulam adott. Jelölje \mathbb{S}^n az \mathbb{R}^{n+1} egységgömbjének felszínét, azaz $\mathbb{S}^n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\bar{x}\| = 1\}$.

49. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos és $f(\bar{x}) = -f(-\bar{x})$. Ekkor van olyan $\bar{x} \in \mathbb{S}^n$, amelyre $f(\bar{x}) = 0$.*

Az intervallum egy színezéséhez készítünk egy $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt. Ha $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$, akkor legyen $z(\bar{x}) = (z_0, \dots, z_{n+1})$ úgy, hogy $z_0 = 0$, $z_j = \sum_{i=1}^j x_i^2$ minden $j \geq 1$ esetén. Legyen $f_j(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i/|x_i|)m_j(i)$, ahol $m_j(i)$ a j -edik szín $[z_{i-1}, z_i]$ -be eső mértéke, $1 \leq j \leq n$. Az f függvény j -edik koordinátája legyen f_j . Ezzel az f folytonos, \mathbb{S}^n -et \mathbb{R}^n -be viszi, így a 49. tétel szerint van olyan $\bar{x} \in \mathbb{S}^n$ amelyre $f(\bar{x}) = 0$. Legyen $Z = \cup\{[z_{i-1}, z_i] : x_i/|x_i| = 1\}$. Mivel $f(\bar{x}) = 0$, Z kettéosztás, és legfeljebb n vágást okoz. \square

A 48. lemmából következik a 47. tétel, hisz ha egy vágás rossz, azaz elvágna egy i típusú követ, akkor egy másik vágás szintén elvág egy ilyet a párosság miatt.

Ha egyszerre eltoljuk őket, akkor csökkenthető a köveken átmenő vágások száma, indukcióval a nulláig. \square

Megjegyzés. A 48. lemma m_j sűrűségeit kicserélve folytonosan integrálható függvényekre kapható Hobby és Rice egy régi tétele:

50. Tétel. *A $g_1, \dots, g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények folytonosan integrálhatóak. Ekkor van olyan $0 = z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_n \leq z_{n+1} = 1$ és $\delta_i \in \{-1, 1\}$, $1 \leq i \leq n + 1$, hogy $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \int_{z_{i-1}}^{z_i} g_j = 0$ minden $1 \leq k \leq n$.*

Erre támaszkodva bizonyítható irigységmentes, sőt, teljesen egyenlő elosztás létezése is.⁸

51. Tétel. *A C korlátos, mérhető halmaz felbontható $\{C_i\}_{i=1}^n$ halmazok diszjunkt uniójára úgy, hogy $\mu_j(C_i) = 1/n$ minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén.*

Bizonyítás: Befoglalva C -t egy elég nagy dobozba és egy mozgó hipersíkkal elvágva visszajátszhatjuk az elosztást az $I = [0, 1]$ -re, amin a μ_i mértékek g_i sűrűségfüggvényt indukálnak. Ha $n = 2^k$, akkor a 50. tétel többszöri alkalmazása adja az eredményt. Ha n nem kettőhatvány, akkor végezzük el az osztást 2^k -ra, ahol $n < 2^k$ és k minimális, osszunk szét n részt, és a maradékra rekurzíven folytassuk. A maradék μ_i mértéke minden lépésben legalább feleződik és nullához tart. A játékosok végső része megszámlálható sok mérhető, és csupa egyforma mértékű, halmaz uniója lesz. \square

⁸Sajnos véges megvalósítása az nem.

Irodalomjegyzék

- [1] N. Alon and J. Spencer, *The Probabilistic Method*, Academic Press, New York, (1992)
- [2] L. V. Allis, H. J. van den Herik and M. P. Huntjens, Go-Moku solved by new search techniques. Proc. 1993 AAAI Fall Symposium on Games: Planning and Learning, AAAI Press Technical Report FS93-02, pp. 1-9, Menlo Park, CA.
- [3] J. Balogh, R. Martin and A. Pluhár, The diameter game. *Horizon of Combinatorics* konferencia, Balatonalmádi (2006).
- [4] J. Beck, Van der Waerden and Ramsey games. *Combinatorica* **1** (1981), 103–116.
- [5] J. Beck, Remarks on positional games. *Acta Math Acad Sci Hungar* **40** (1982), 65–71.
- [6] J. Beck, On a generalization of Kaplansky’s game. *Discrete Mathematics* **42** (1982) 27–35.
- [7] J. Beck, Random graphs and positional games on the complete graph. *Annals of Discrete Mathematics* **28**(1985), 7–13.
- [8] J. Beck, An algorithmic approach to the Lovász Local Lemma. I. *Random Structures and Algorithms* **2** (1991), 343–365.
- [9] J. Beck, Deterministic graph games and a probabilistic intuition. *Combinatorics, Probability and Computing* **3** (1994), 13–26.
- [10] J. Beck, Positional games and the second moment method. *Combinatorica* **22** (2) (2002) 169–216.
- [11] J. Beck, Tic-Tac-Toe. Contemporary combinatorics, 93–137, *Bolyai Soc. Math. Stud.*, **10**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002.

- [12] J. Beck, Positional Games. *Combinatorics, Probability and Computing* **14** (2005), 649–696.
- [13] J. Beck, *lecture notes, Rutgers University* New Brunswick 1993.
- [14] J. Beck, *Combinatorial Games. Tic-Tac-Toe Theory*. Cambridge University Press (2008).
- [15] M. Bednarska, and T. Łuczak, Biased positional games and the phase transition. *Random Structures and Algorithms* **18** (2001), no. 2, 141–152.
- [16] E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy, *Winning Ways For Your Mathematical Plays*, Volume **2**. Academic Press, New York 1982.
- [17] C. Bouton, Nim, a game with a complete mathematical theory. *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., Vol. 3, No. 1/4 (1902), 35–39.
- [18] J. M. Byskov, Maker-Maker and Maker-Breaker Games are PSPACE-complete. *Technical Report, BRICS Research Series* RS-04-14, Dept. Comp. Sci., Univ. Aarhus, August 2004.
- [19] Chvátal, *Linear programming. A Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman and Company*, New York, 1983.
- [20] V. Chvátal and P. Erdős, Biased positional games. Algorithmic aspects of combinatorics (Conf., Vancouver Island, B.C., 1976). *Annals of Discrete Mathematics* **2** (1978), 221–229.
- [21] J. H. Conway, *On numbers and games*. London Mathematical Society Monographs, No. 6. Academic Press, London-New York, 1976.
- [22] B. Csákány, A form of the Zermelo-von Neumann theorem under minimal assumptions. *Acta Cybernetica* **15** (2002), no. 3, 321–325.
- [23] B. Csákány, *Diszkrét matematikai játékok*, Polygon Könyvek, Szeged, 1998.
- [24] A. Csernenszky, C. I. Mándity and A. Pluhár, On Chooser-Picker Positional Games. *Discrete Mathematics* **309** (2009) 5141–5146.
- [25] L. Csirmaz, On a combinatorial game with an application to Go-Moku. *Discrete Mathematics* **29** (1980), 19–23.

- [26] P. Erdős and L. Lovász, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. in: *Infinite and Finite Sets eds.: A. Hajnal et al., Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, **11**, North-Holland, Amsterdam, 1975, 609–627.
- [27] P. Erdős and J. L. Selfridge, On a combinatorial game. *Journal of Combinatorial Theory Series A* **14** (1973), 298–301.
- [28] S. Even and R. E. Tarjan, A combinatorial problem which is complete in polynomial space. *J. Assoc. Comput. Mach.* **23** (1976), no. 4, 710–719.
- [29] D. Gale, The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem. *American Mathematical Monthly* **86** (1979), no. 10, 818–827.
- [30] D. Gale, H. Kuhn and A. Tucker, Linear programming and the theory of games, in T. Koopmans, ed., *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley and Sons, New York, (1951) pp. 317–329.
- [31] M. Gardner, *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, Simon and Schuster Inc., New York 1959.
- [32] M. Gardner, Mathematical Games. *Scientific American* **225** #2 (Aug.1971) 102-105; **232** #6 (June 1975) 106-111; **233** #6 (Dec. 1975) 116-119; **240** #4 (Apr. 1979) 18-28.
- [33] M. R. Garey, D. S. Johnson, and R. L. Stockmeyer, Some simplified NP-complete Problems. *Proc 6th ACM Symposium on the Theory of Computation*, 1974, pp. 47–63.
- [34] A. S. Goldstein, E. M. Reingold, The complexity of pursuit on a graph. *Theoretical Computer Science* **143** (1995) 93–112.
- [35] R. K. Guy and J. L. Selfridge, Problem S.10, *American Mathematical Monthly* **86** (1979); solution T.G.L. Zettters **87** (1980) 575-576.
- [36] A. W. Hales and R. I. Jewett, Regularity and positional games. *Trans Amer. Math. Soc.* **106** (1963) 222–229; M.R. # 1265.
- [37] M. Hall Jr., Distinct representatives of subsets. *Bull. Amer. Math. Soc.* **54**(1948), 922–926.
- [38] C. Hartman, <http://www.cs.uaf.edu/hartman/pouzethex.pdf>, letöltés: 2006, augusztus 2.

- [39] P. Hein, Vil de lære Polygon? Politiken newspaper, Denmark, 26 December 1942.
- [40] R. Hochberg, C. McDiarmid and M. Saks, On the bandwidth of triangulated triangles. *Discrete Mathematics* **138** (1995) 261–265.
- [41] A. Hoffman, személyes közlés.
- [42] M. Kutz, Weak Positional Games on Hypergraphs of Rank Three. *PhD thesis, Freie Universität Berlin, 2004.*
- [43] J. Lagarias and D. Sleator, Who wins Misère Hex? In Elwyn Berlekamp and Tom Rodgers (eds): *The Mathemagician and Pied Puzzler*, pages 237–240. A. K. Peters, 1999.
- [44] A. Lehman, A solution of the Shannon switching game. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **12** 1964 687–725.
- [45] C.E. Lemke and J.T. Howson, Equilibrium Points of Bi-matrix Games. *SIAM Journal* Vol. **12** (1964) 413–423.
- [46] L.H. Loomis, On a theorem of von Neumann. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.* **32** 213–215 1946.
- [47] L. Lovász, *Combinatorial problems and exercises*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979. A magyar nyelvű változat: Kombinatorikai problémák és feladatok, Typotex kiadó, 1999.
- [48] Lovász László, személyes közlés.
- [49] K. Noshita, Union-Connections and Straightforward Winning Strategies in Hex. *ICGA Journal*, 2005 28(1): cover, 3–12.
- [50] R. J. Nowakowski and P. Winkler, Vertex-to-vertex pursuit in a graph. *Discrete Math* **43** (1983), 235–239.
- [51] O. Patashnik, Qubic: $4 \times 4 \times 4$ tic-tac-toe. *Mathematical Magazine* **53** (1980), no. 4, 202–216.
- [52] Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield and D. B. Wilson, Random-turn Hex an other Selection Games. arXiv:math.PR/0508580 v2 26 Apr 2006
- [53] A. Pluhár, *Positional Games on the Infinite Chessboard* Ph.D. dissertation, Rutgers University 1994.

- [54] A. Pluhár, Generalized Harary Games. *Acta Cybernetica* **13** no. 1, (1997) 77–83.
- [55] A. Pluhár, The accelerated k -in-a-row game. *Theoretical Computer Science* **270** (2002), no. 1-2, 865–875.
- [56] A. Pluhár, The Recycled Kaplansky's Game. *Acta Cybernetica* **16** no. 3, (2004) 451–458.
- [57] A. Pluhár, Pozíciós játékok, *Sigma* **3-4** (2007), 111-130.
- [58] A. Pluhár, Kombinatorikus játékok, *elektronikus jegyzet*.
- [59] A. Quilliot, Jeux et Point Fixes sur les graphes. Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI, 1978, 131–145.
- [60] S. Reisch, Hex ist PSPACE-vollständig. *Acta Informatica* **15** (1981), no. 2, 167–191.
- [61] H.E. Scarf, The Core of an N Person Game. *Econometrica*, Vol. **35** (1967) 50–69.
- [62] N. Sieben, Hexagonal polyomino weak $(1, 2)$ -achievement games. *Acta Cybernetica* **16** (2004), no. 4, 579–585.
- [63] T. J. Schaefer, On the complexity of some two-person perfect-information games. *J. Comput. System Sci.* **16** (1978), no. 2, 185–225.
- [64] J. Spencer, Randomization, derandomization and antirandomization: three games. *Theoretical Computer Science* **131** (1994), no. 2, 415–429.
- [65] B. von Stengel, Computing equilibria for two-person games. *Handbook of Game Theory* Vol. **3**, eds. R.J. Aumann and S. Hart North-Holland, Amsterdam 2002.
- [66] M. Stojaković and T. Szabó, Positional Games on Random Graphs. *Random Structures and Algorithms* **26** (2005), no. 1-2, 204–223.
- [67] Székely Gábor, Paradoxonok a véletlen matematikájában, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest (1982).
- [68] L. A. Székely, On two concepts of discrepancy in a class of combinatorial games. *Finite and Infinite Sets, Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, Vol. **37**, North-Holland, 1984, 679–683.

- [69] N. N. Taleb, *The Black Swan. The impact of the highly improbable*, Random House, New York, N. Y. (2007).
- [70] H. Whitney, On the Abstract Properties of Linear Dependence. *American Journal of Mathematics* **57** (1935), no. 3, 509–533.
- [71] A. C-C. Yao, Probabilistic computations: Towards a unified measure of complexity. *Proceedings of the 17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 222–227, 1977.
- [72] E. Zermelo, Über eine Anwendung der Mengenlehre und der Theorie des Schachspiels, *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, Cambridge, 501–504.